東京医科歯科大学

2010 年 第 2 問

$\boxed{2}$ 座標空間において，8 点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1)，D(0, 1, 1)，E(1, 0, 1)，F(1, 1, 0)，G(1, 1, 1) をとり，この 8 点を頂点とする立方体を Q とする．また点 P$(x,\ y,\ z)$ と正の実数 t に対し，6 点 $(x+t,\ y,\ z)$，$(x-t,\ y,\ z)$，$(x,\ y+t,\ z)$，$(x,\ y-t,\ z)$，$(x,\ y,\ z+t)$，$(x,\ y,\ z-t)$ を頂点とする正八面体を $\alpha_t(\mathrm{P})$，その外部の領域を $\beta_t(\mathrm{P})$ で表す．ただし，立方体および正八面体は内部の領域も含むものとする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $0 < t \leqq 1$ のとき，Q と $\alpha_t(\mathrm{O})$ の共通部分 $Q \cap \alpha_t(\mathrm{O})$ の体積を t で表せ．

(2) $Q \cap \beta_1(\mathrm{O}) \cap \beta_1(\mathrm{D}) \cap \beta_1(\mathrm{E}) \cap \beta_1(\mathrm{F})$ の体積を求めよ．

(3) $\dfrac{1}{2} < t \leqq 1$ のとき，$Q \cap \alpha_t(\mathrm{O}) \cap \alpha_t(\mathrm{A})$ の体積を t で表せ．

(4) t が $0 < t \leqq 1$ の範囲で変化するとき，$Q \cap \alpha_t(\mathrm{O}) \cap \beta_t(\mathrm{A}) \cap \beta_t(\mathrm{B}) \cap \beta_t(\mathrm{C})$ の体積が最大となる t の値を求めよ．