佐賀大学

2013年 理工学部 第2問

$\boxed{2}$ $a_n = \dfrac{1}{2^n}\tan\dfrac{1}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ のとき，等式 $\dfrac{1}{2}\tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\theta} - \dfrac{1}{\tan 2\theta}$ を示せ．

(2) (1) を用いて，和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ の和を求めよ．

(1)
$$\frac{1}{2\tan\theta} - \frac{1}{\tan 2\theta} = \frac{1}{2\tan\theta} - \frac{1}{\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$$
$$= \frac{1}{2\tan\theta} - \frac{1-\tan^2\theta}{2\tan\theta}$$
$$= \frac{1}{2}\tan\theta \quad ▨$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\tan\frac{1}{2^k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}\cdot\left(\frac{1}{2}\tan\frac{1}{2^k}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{2\tan\frac{1}{2^k}} - \frac{1}{\tan\frac{1}{2^{k-1}}}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2^k\tan\frac{1}{2^k}} - \frac{1}{2^{k-1}\tan\frac{1}{2^{k-1}}}\right)$$
$$= \left(\cancel{\frac{1}{2\tan\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\tan 1}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2^2\tan\frac{1}{2^2}}} - \cancel{\frac{1}{2\tan\frac{1}{2}}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n\tan\frac{1}{2^n}} - \cancel{\frac{1}{2^{n-1}\tan\frac{1}{2^{n-1}}}}\right)$$
$$= \underline{\frac{1}{2^n\tan\frac{1}{2^n}} - \frac{1}{\tan 1}}\ /\!/$$

(3)
$$\lim_{n\to\infty} 2^n\tan\frac{1}{2^n} = \underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}}}_{\to 1}\cdot\frac{1}{\cos\frac{1}{2^n}} = 1$$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ より

$$\therefore \underline{\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1 - \frac{1}{\tan 1}}\ /\!/$$