

2014年工学部第1問



1 行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ が $A^2 + A + E = O$ の関係を満たしているとき、次の問いに答えよ。ただし、 a は実数とする。

- (1) a の値を求めよ。
 (2) A^3 を、(1) で求めた a の値を用いて求めよ。
 (3) $E + A + A^2 + A^3 + A^4 + A^5 + A^6 + A^7 + A^8 + A^9 + A^{10}$ を、(1) で求めた a の値を用いて求めよ。
 (4) A の逆行列 A^{-1} を、(1) で求めた a の値を用いて求めよ。

$$(1) A^2 = \begin{pmatrix} a & -a \\ -1 & a+1 \end{pmatrix} \text{ より } A^2 + A + E = \begin{pmatrix} a+1 & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix} = O \quad \therefore \underline{a = -1} //$$

$$(2) A^2 + A + E = O \text{ の両辺に左から } A \text{ をかけて, } A^3 + A^2 + A = O$$

$$\text{再び } A^2 = -A - E \text{ より } A^3 = -A^2 - A = E \quad \therefore \underline{A^3 = E} //$$

$$(3) (\text{与式}) = E + A + A^2 + E + A + A^2 + E + A + A^2 + E + A \quad (\because (2) \text{ より})$$

$$= A + E \quad (\because A^2 + A + E = O \text{ より})$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underline{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} //$$

$$(4) \det(A) = 0 - (-1) = 1 \text{ より } A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}} //$$