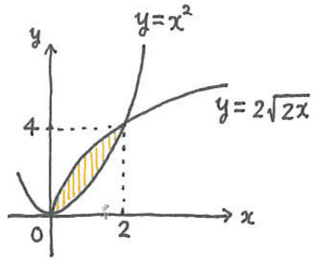
2010年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 2曲線 $y=x^2$, $y=2\sqrt{2x}$ で囲まれた図形 D について，次の問いに答えよ．

(1) 図形 D の面積を求めよ．

(2) 図形 D は直線 $y=2$ によって二つの図形に分けられる．このとき，それぞれの図形の面積 S_1, S_2 を求めよ．ただし，$S_1 > S_2$ とする．

(3) 図形 D の面積が直線 $x=a$ によって二等分されるとき，a^3 の値を求めよ．



(1) 2曲線の交点を求めると．$x^2-2\sqrt{2x}=0$ より

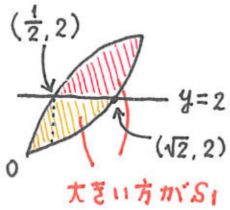
$\sqrt{x}(x\sqrt{x}-2\sqrt{2})=0$ $\therefore x=0, 2$ 交点は $(0,0)$, $(2,4)$

求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^2 2\sqrt{2x}-x^2\,dx$$

$$=\left[2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$=\underline{\frac{8}{3}}\,//$$



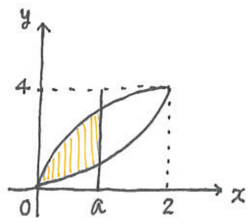
(2) (下側) $=\int_0^{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2x}-x^2\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} 2-x^2\,dx$

$$=\left[2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[2x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{2}{3}-\frac{1}{24}+2\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}-1+\frac{1}{24}$$

$$=\frac{4\sqrt{2}-1}{3}\quad\left(>\frac{4}{3}\right)$$

(上側) $=\frac{8}{3}-\frac{4\sqrt{2}-1}{3}=\frac{9-4\sqrt{2}}{3}$ $\therefore \underline{S_1=\frac{4\sqrt{2}-1}{3},\ S_2=\frac{9-4\sqrt{2}}{3}}\,//$



(3) $\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{3}=\int_0^a 2\sqrt{2x}-x^2\,dx$

$$=\left[2\sqrt{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right]_0^a$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{3}a^{\frac{3}{2}}-\frac{a^3}{3}$$

$\therefore (a^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2})^2=4$

$a^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}=\pm 2$ $0<a<2$ より． $a^{\frac{3}{2}}=2\sqrt{2}-2$ $\therefore \underline{a^3=4(3-2\sqrt{2})}\,//$