岩手大学

2017年 理工学部 第2問

増田

$\boxed{2}$ 座標空間に4点A(0, 1, 0), B($\sqrt{3}$, 2, 0), C($\sqrt{3}$, 2, 1), D(-1, $1+\sqrt{3}$, 0)がある．線分DCを$t:(1-t)$に内分する点をPとする（ただし，$0<t<1$）．次の問いに答えよ．

(1) 内積$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$および$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$をそれぞれ求めよ．

(2) 3点A，B，Cが定める平面上に点Hを，$\overrightarrow{PH}$が$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$の両方と垂直になるようにとる．$\overrightarrow{AH}=u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AC}$と表すときの実数$u$，$v$を求めよ．

(3) 点Pを中心とする半径rの球が，3点A，B，Cが定める平面に接するように点Pを定める．このときのtの値をrで表せ（ただし，$r<2$）．

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = (\sqrt{3}, 1, 0)\cdot(\sqrt{3}, 1, 1) = 3+1+0 = 4$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 1, 0)\cdot(-1, \sqrt{3}, 0) = -\sqrt{3}+\sqrt{3}+0 = 0$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = (\sqrt{3}, 1, 1)\cdot(-1, \sqrt{3}, 0) = -\sqrt{3}+\sqrt{3}+0 = 0$

(2) $\overrightarrow{PH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP}$

点Pは線分DCを$t:(1-t)$に内分する点なので、

$\overrightarrow{AP} = (1-t)\overrightarrow{AD} + t\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{PH} = u\overrightarrow{AB} + v\overrightarrow{AC} - (1-t)\overrightarrow{AD} - t\overrightarrow{AC} = u\overrightarrow{AB} + (v-t)\overrightarrow{AC} - (1-t)\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より、

$u|\overrightarrow{AB}|^2 + (v-t)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} - (1-t)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 4u+4(v-t)=0$ …①

$\overrightarrow{PH}\perp\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より、

$u\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + (v-t)|\overrightarrow{AC}|^2 - (1-t)\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = 4u+5(v-t)=0$ …②

①, ②より $\underline{v=t,\ u=0}$ //

(3) 球と3点A, B, Cが定める平面の接点をIとすると、$\overrightarrow{PI}$は$\overrightarrow{AB}$と$\overrightarrow{AC}$の両方と垂直になるので、(2)で求めた点Hと一致する。

このとき $\overrightarrow{PH} = -(1-t)\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{PH}$は球の半径なので、

$|\overrightarrow{PH}| = |-(1-t)\overrightarrow{AD}| = (1-t)|\overrightarrow{AD}| = r$

$|\overrightarrow{AD}| = |(-1, \sqrt{3}, 0)| = 2$ だから

$2(1-t) = r$

$t = \underline{1-\dfrac{r}{2}}$ //