旭川医科大学

2018年 医学部 第3問

$\boxed{3}$ aは実数で$a>1$とし，曲線$y=\log x$上に2点A$(a,\ \log a)$，B$\left(\dfrac{1}{a},\ \log\dfrac{1}{a}\right)$をとる．直線ABと曲線$y=\log x$で囲まれた部分の面積を$S$とし，直線AB，$x$軸，直線$x=\dfrac{1}{a}$および直線$x=a$で囲まれた部分の面積を$T$とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $S,\ T$をaを用いて表せ．

(2) 次の極限値を求めよ．ただし，(iii)において必要であれば

$$x>0 \text{ のとき，} \log(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい．

(i) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{S}{T}$　　(ii) $\displaystyle\lim_{a\to 1+0}\frac{T}{(a-1)^2}$

(iii) $\displaystyle\lim_{a\to 1+0}\frac{S}{(a-1)^2}$　　(iv) $\displaystyle\lim_{a\to 1+0}\frac{S}{T}$

(3) $a>1$の範囲で，$\dfrac{S}{T}$は単調に増加することを示せ．

(4) $S=T$となるaが$e^{\frac{3}{2}}<a<e^2$の範囲に唯1つあることを示せ．ただし，eは自然対数の底で$e=2.7182\cdots$である．