2012 年 第 2 問

2 a を実数とする．xy 平面上の 2 曲線

$$C_1 : y = e^x, \quad C_2 : y = -e^{1-x} + a$$

を考える．

C_1 上の点 $\mathrm{P}(t,\ e^t)$ $(t > 0)$ における C_1 の接線 ℓ_t が，C_2 上の点 $\mathrm{Q}(s,\ -e^{1-s} + a)$ における C_2 の接線にもなっているとき，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底である．

(1) t と s の関係式を求めよ．また，a を t を用いて表せ．

(2) C_1，ℓ_t および y 軸で囲まれた部分の面積を $S_1(t)$ とし，C_2，ℓ_t および y 軸で囲まれた部分の面積を $S_2(t)$ とする．ただし，Q が y 軸上にあるときは $S_2(t) = 0$ とする．

(i) $S_1(t)$，$S_2(t)$ を t を用いて表せ．

(ii) $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$ とする．t が $t > 0$ の範囲を動くとき，t の関数 $S(t)$ の最小値を求めよ．