

2010年 都市教養（理系）第1問



1 以下の問いに答えなさい。

- (1) 任意の整数 m に対して、 m^2 を 3 で割ると余りは 0 または 1 になることを示しなさい。
 (2) 整数 a, b, c が $a^2 + b^2 = c^2$ を満たしているとする、積 ab は 12 で割り切れることを示しなさい。

(1) m を 3 で割った余りで場合分けする。(i) m を 3 で割ると 1 余るとき。 $m = 3k + 1$ (k : 整数) と表せるので

$$m^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1 \quad \therefore m^2 \text{ を } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る.}$$

(ii) m を 3 で割ると 2 余るとき。 $m = 3k + 2$ (k : 整数) と表せるので

$$m^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1 \quad \therefore m^2 \text{ を } 3 \text{ で割ると } 1 \text{ 余る.}$$

(iii) m が 3 で割り切れるとき。

$$m = 3k \text{ (k : 整数) と表せるので, } m^2 = 9k^2 \quad \therefore m^2 \text{ を } 3 \text{ で割ると余りは } 0$$

(i) ~ (iii) より、題意は示された \square (2) (1) より、 a, b, c をそれぞれ 3 で割った余りを a', b', c' とすると。考えられる a', b', c' の組は、 $(a', b', c') = (0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)$ いずれの場合も $a'b' = 0$ すなわち ab は 3 で割り切れる \dots ①(1) にならって、任意の整数 m に対し、 m^2 を 4 で割ると余りは 0 または 1 になることを示す。(i) $m = 2k$ のとき、 $m^2 = 4k^2 \quad \therefore m^2$ を 4 で割ると余りは 0(ii) $m = 2k + 1$ のとき、 $m^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1 \quad \therefore m^2$ を 4 で割ると余りは 1 a, b, c をそれぞれ 4 で割った余りを a', b', c' とすると。考えられる a', b', c' の組は、 $(a', b', c') = (1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 0)$ いずれの場合も ab は 4 で割り切れる。 \dots ②①, ② より、 ab は 12 で割り切れる。 \square