2014年 理工学部 第3問　　1枚目／3枚

3 座標平面において x 軸上を動く点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を中心とする半径1の円を K とする．次の問いに答えよ．

(1) 円 K が直線 $y=x-2$ と接するときの a の値を求めよ．

(2) t を変数とする関数を，$F(t)=\displaystyle\int_t^1\sqrt{1-x^2}\,dx$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ とする．$0\leqq a<1$ のとき，円 K の内部と領域 $x\leqq 0$ の共通部分の面積を関数 $F(t)$ を用いて表せ．

(3) 領域 $D=\{(x,\ y)\mid x\geqq 0,\ y\geqq x-2\}$ とする．円 K の内部と領域 D との共通部分の面積が最大となるときの a の値を求めよ．

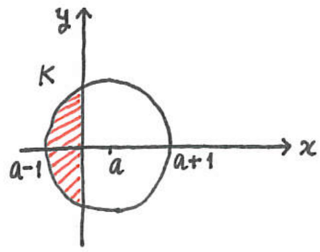
(1) 点Pと直線 $y=x-2$ のキョリが半径1と等しくなるので，

点と直線のキョリ公式より．$1=\dfrac{|a-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}$

$\therefore\ |a-2|=\sqrt{2}$

$\therefore\ a-2=\pm\sqrt{2}$

$\therefore\ \underline{a=2\pm\sqrt{2}}$ //



(2) 求める面積は右図の斜線部分の面積であり．これを S とおく．

$K:(x-a)^2+y^2=1$ より．$y\geqq 0$ の範囲では．$y=\sqrt{1-(x-a)^2}$ と表せる．

$\therefore\ S=2\displaystyle\int_{a-1}^{0}\sqrt{1-(x-a)^2}\,dx$

ここで，$t=a-x$ とおいて置換積分すると．$dt=-dx$，

x	$a-1\to 0$
t	$1\to a$

$\therefore\ S=2\displaystyle\int_1^a\sqrt{1-t^2}\,(-dt)$

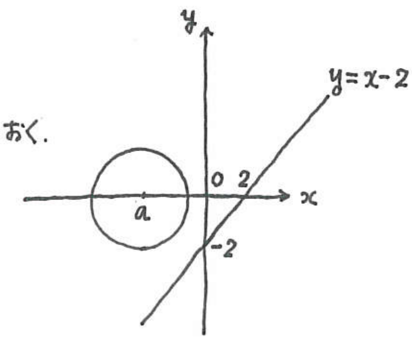
$=2\displaystyle\int_a^1\sqrt{1-t^2}\,dt$

$=\underline{2F(a)}$ //

(3) 次のように5つの場合に分けて考える．共通部分の面積を $S(a)$ とおく．

(i) $a<-1$ のとき．

右の図のようになるので $S(a)=0$



2枚目につづく

2014年 理工学部 第3問　　2枚目／3枚　　数理 石井K

3 座標平面において x 軸上を動く点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を中心とする半径1の円を K とする．次の問いに答えよ．

(1) 円 K が直線 $y=x-2$ と接するときの a の値を求めよ．

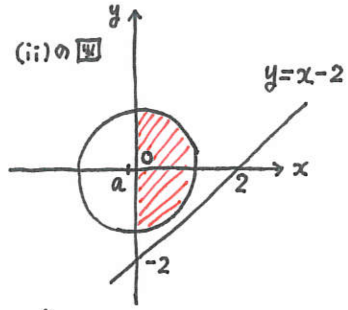
(2) t を変数とする関数を，$F(t)=\int_t^1 \sqrt{1-x^2}\,dx\ (-1 \leqq t \leqq 1)$ とする．$0 \leqq a < 1$ のとき，円 K の内部と領域 $x \leqq 0$ の共通部分の面積を関数 $F(t)$ を用いて表せ．

(3) 領域 $D=\{(x,\ y)\mid x \geqq 0,\ y \geqq x-2\}$ とする．円 K の内部と領域 D との共通部分の面積が最大となるときの a の値を求めよ．

(3) のつづき

(ii) $-1 \leqq a < 2-\sqrt{2}$ のとき．

右図のようになるので，円の内部のうち (2) で求めた部分を引けばよいので，$S(a)=\pi-2F(a)$

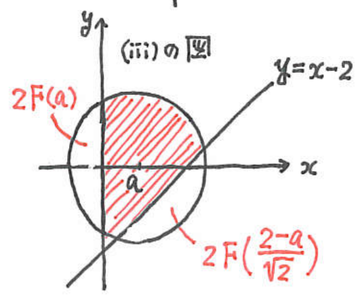


(iii) $2-\sqrt{2} \leqq a < 1$ のとき．

右図のようになり，円の中心と直線 $y=x-2$ のキョリは点と直線のキョリ公式より，

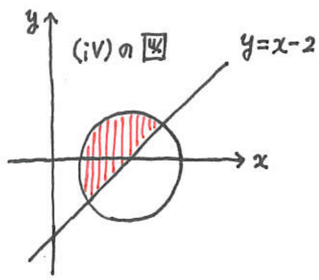
$$\frac{|a-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2-a}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ S(a)=\pi-2F(a)-2F\left(\frac{2-a}{\sqrt{2}}\right)$$

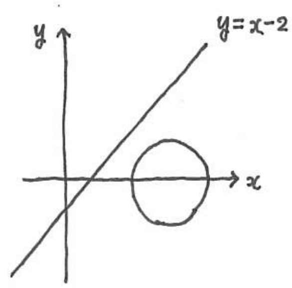


(iv) $1 \leqq a < 2+\sqrt{2}$ のとき

(iii)の議論より，$S(a)=\pi-2F\left(\frac{2-a}{\sqrt{2}}\right)$



(v) $a \geqq 2+\sqrt{2}$ のとき，右の図より $S(a)=0$



(i)〜(v) より，$S(a)$ は $a<2-\sqrt{2}$ で単調増加，

$a \geqq 1$ で単調減少するので

(iii) の範囲で最大値を求めればよい．

$$\therefore\ S'(a)=-2\left(-\sqrt{1-a^2}\right)-2\left(-\sqrt{1-\left(\frac{2-a}{\sqrt{2}}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$=2\sqrt{1-a^2}-\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-\frac{(2-a)^2}{2}}$$

$$=2\sqrt{1-a^2}-\sqrt{2-(2-a)^2}$$

$2\sqrt{1-a^2}=\sqrt{2-(2-a)^2}$ を両辺2乗して解く

$\therefore\ 2-\sqrt{2} \leqq a < 1$ において，$S'(a)=0$ となるのは $a=\dfrac{-2+\sqrt{22}}{3}$ のとき．

3枚目につづく

2014年 理工学部 第3問　　3枚目／3枚

数理 石井K

$\boxed{3}$ 座標平面において x 軸上を動く点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を中心とする半径1の円を K とする．次の問いに答えよ．

(1) 円 K が直線 $y = x - 2$ と接するときの a の値を求めよ．

(2) t を変数とする関数を，$F(t) = \int_t^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ $(-1 \leqq t \leqq 1)$ とする．$0 \leqq a < 1$ のとき，円 K の内部と領域 $x \leqq 0$ の共通部分の面積を関数 $F(t)$ を用いて表せ．

(3) 領域 $D = \{(x,\ y)\,|\,x \geqq 0,\ y \geqq x - 2\}$ とする．円 K の内部と領域 D との共通部分の面積が最大となるときの a の値を求めよ．

(3) のつづき

増減表は以下のようになる

a	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{22}}{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$S'(a) = 2\sqrt{1-a^2} - \sqrt{2-(2-a)^2}$ より．

$S'(1) = -1 < 0$

また，$2-\sqrt{2} < \frac{2}{3} < \frac{-2+\sqrt{22}}{3}$ であり，

$S'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{2}}{3} > 0$

よって，$S(a)$ が最大となるのは $a = \frac{-2+\sqrt{22}}{3}$ のとき

ポイント

(2)は 円Kの中心と直線がキョリ a のとき．$(0 \leqq a < 1)$

直線で切りとられる部分のうち，Kの中心を含まない方の面積が $2F(a)$ となることを表している．つまり，直線は特に y 軸でなくともよい

よって (3) の (iii) では，円Kの中心と直線 $y=x-2$ とのキョリを求めている

このことを見抜くことがこの問題最大の難所といえる．