2015年 理系 第4問　1枚目／2枚

4　a, b, p は $a>0$, $b>0$, $p<0$ を満たす実数とする．座標平面上の2曲線

$$C_1 : y=e^x,\quad C_2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

を考える．ただし，e は自然対数の底である．C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ．

(1) p を a を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ．

(1) C_2 が $(p,\ e^p)$ を通るので，

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{e^{2p}}{b^2}=1 \quad \cdots ①$$

C_2 の接線は，$\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{e^p y}{b^2}=1$ なので

傾きは，$-\dfrac{b^2p}{a^2e^p}$

これが C_1 の接線の傾き，e^p に等しいので

$$-\frac{b^2p}{a^2e^p}=e^p \quad \cdots ②$$

①，②より，b を消去して，$p^2-p-a^2=0$

$\therefore\ p=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4a^2}}{2}$　　$p<0$ より，$\underline{p=\dfrac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}}$ //

(2)
$$\lim_{a\to\infty}(p+a)=\lim_{a\to\infty}\frac{2a+1-\sqrt{4a^2+1}}{2}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{(2a+1-\sqrt{4a^2+1})(2a+1+\sqrt{4a^2+1})}{2(2a+1+\sqrt{4a^2+1})}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{(2a+1)^2-(4a^2+1)}{2(2a+1+\sqrt{4a^2+1})}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{a}+\sqrt{4+\frac{1}{a^2}}}$$

$$=\underline{\frac{1}{2}}$$ //

0001976183208999

広島大学

2015年 理系 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ a, b, p は $a>0$, $b>0$, $p<0$ を満たす実数とする．座標平面上の2曲線

$$C_1 : y = e^x, \quad C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える．ただし，e は自然対数の底である．C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ．

(1) p を a を用いて表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ．

(3) ② より $\dfrac{b^2}{a} = -\dfrac{a}{p}\cdot e^{2p}$

$$\therefore \frac{b^2e^{2a}}{a} = -\frac{a}{p}e^{2(p+a)}$$

$$= -\frac{2a}{1-\sqrt{1+4a^2}}\cdot e^{2(p+a)}$$

$$= -\frac{2a(1+\sqrt{1+4a^2})}{(1-\sqrt{1+4a^2})(1+\sqrt{1+4a^2})}\cdot e^{2(p+a)}$$

$$= -\frac{2a(1+\sqrt{1+4a^2})}{-4a^2}\cdot e^{2(p+a)}$$

$$= \underbrace{\frac{\frac{1}{a}+\sqrt{\frac{1}{a^2}+4}}{2}}_{\to 1}\cdot \underbrace{e^{2(p+a)}}_{\to e\ (\because (2)より)}$$

∴ (2) の結果を用いて

$$\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a} = \underline{e}\ //$$