



2015年理系第4問

1枚目 / 2枚

4  $a, b, p$  は  $a > 0, b > 0, p < 0$  を満たす実数とする. 座標平面上の2曲線

$$C_1: y = e^x, \quad C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える. ただし,  $e$  は自然対数の底である.  $C_1$  と  $C_2$  が点  $(p, e^p)$  を共有し, その点における  $C_1$  の接線と  $C_2$  の接線が一致するとき, 次の問いに答えよ.

(1)  $p$  を  $a$  を用いて表せ.(2)  $\lim_{a \rightarrow \infty} (p+a)$  を求めよ.(3)  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a}$  を求めよ.(1)  $C_2$  が  $(p, e^p)$  を通るので,

$$\frac{p^2}{a^2} + \frac{e^{2p}}{b^2} = 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

 $C_2$  の接線は  $\frac{px}{a^2} + \frac{e^p y}{b^2} = 1$  なので

$$\text{傾きは } -\frac{b^2 p}{a^2 e^p}$$

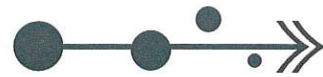
これが  $C_1$  の接線の傾き  $e^p$  に等しいので

$$-\frac{b^2 p}{a^2 e^p} = e^p \quad \dots \textcircled{2}$$

 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$  より,  $b$  を消去して,  $p^2 - p - a^2 = 0$ 

$$\therefore p = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a^2}}{2} \quad p < 0 \text{ より, } p = \frac{1 - \sqrt{1+4a^2}}{2} //$$

$$\begin{aligned} (2) \lim_{a \rightarrow \infty} (p+a) &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2a+1-\sqrt{4a^2+1}}{2} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(2a+1-\sqrt{4a^2+1})(2a+1+\sqrt{4a^2+1})}{2(2a+1+\sqrt{4a^2+1})} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{(2a+1)^2 - (4a^2+1)}{2(2a+1+\sqrt{4a^2+1})} \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2}{2 + \frac{1}{a} + \sqrt{4 + \frac{1}{a^2}}} \\ &= \frac{1}{2} // \end{aligned}$$



2015年理系第4問

2枚目/2枚

数理  
石井K

4  $a, b, p$  は  $a > 0, b > 0, p < 0$  を満たす実数とする. 座標平面上の2曲線

$$C_1: y = e^x, \quad C_2: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

を考える. ただし,  $e$  は自然対数の底である.  $C_1$  と  $C_2$  が点  $(p, e^p)$  を共有し, その点における  $C_1$  の接線と  $C_2$  の接線が一致するとき, 次の問いに答えよ.

- (1)  $p$  を  $a$  を用いて表せ.  
 (2)  $\lim_{a \rightarrow \infty} (p + a)$  を求めよ.  
 (3)  $\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a}$  を求めよ.

(3) ②より.  $\frac{b^2}{a} = -\frac{a}{p} \cdot e^{2p}$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{b^2 e^{2a}}{a} &= -\frac{a}{p} e^{2(p+a)} \\ &= -\frac{2a}{1-\sqrt{1+4a^2}} \cdot e^{2(p+a)} \\ &= -\frac{2a(1+\sqrt{1+4a^2})}{(1-\sqrt{1+4a^2})(1+\sqrt{1+4a^2})} \cdot e^{2(p+a)} \\ &= -\frac{2a(1+\sqrt{1+4a^2})}{-4a^2} \cdot e^{2(p+a)} \\ &= \frac{\frac{1}{a} + \sqrt{\frac{1}{a^2} + 4}}{2} \cdot e^{2(p+a)} \\ &\quad \xrightarrow{\rightarrow 1} \quad \xrightarrow{\rightarrow e \text{ (}\because \text{(2)より)}} \end{aligned}$$

$\therefore$  (2)の結果を用いて

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{b^2 e^{2a}}{a} = e //$$