2015年 工・情報・環境学部 (A) 第4問

数理 石井K

4 放物線 $y = x^2 + ax + b$ と x 軸との交点の座標は $(\sin\theta,\ 0)$，$(\sqrt{3}\cos\theta,\ 0)$ である．この放物線と x 軸とで囲まれる部分の面積を S とするとき，次の問いに答えよ．ただし，a，b は定数とし，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ とする．

(1) a，b を θ を用いて表せ．

(2) $a = 0$ のとき，S の値を求めよ．

(3) S の最大値を求めよ．

(1) $x^2 + ax + b$ の解が $x = \sin\theta$，$\sqrt{3}\cos\theta$ であるから

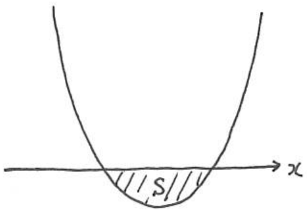
解と係数の関係より．$\underline{a = -\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta\ ,\ b = \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta}$ //

(2) (1)より $a = 0$ のとき．$\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 0$

$\therefore\ 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$ $\quad \dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より $\quad \theta = \dfrac{2}{3}\pi$

このとき．$b = \sqrt{3}\sin\dfrac{2}{3}\pi\cos\dfrac{2}{3}\pi = -\dfrac{3}{4}$

$\therefore\ y = x^2 - \dfrac{3}{4}$



$$\therefore\ S = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} -\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) dx$$

$$= -\left(-\frac{1}{6}\right)\left\{\frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^3$$

$$= \underline{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ //$$

(3)

$$S = \int_{\sqrt{3}\cos\theta}^{\sin\theta} -\left\{x^2 - (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)x + \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right\} dx$$

$$= -\int_{\sqrt{3}\cos\theta}^{\sin\theta} (x - \sqrt{3}\cos\theta)(x - \sin\theta)\, dx$$

$$= \frac{1}{6}(\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta)^3$$

$$= \frac{1}{6}\left\{2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)\right\}^3$$

$$= \frac{4}{3}\sin^3\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より

$\underline{S \text{ は } \theta = \dfrac{5}{6}\pi \text{ のとき最大値 } \dfrac{4}{3} \text{ をとる}}$ //