岩手大学

2014年 工学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ aを正の実数とする．平面上の3点O，A，Bは$|\overrightarrow{OA}|=a$，$|\overrightarrow{OB}|=1$，$|\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}|=\sqrt{a^2+9}$を満たしている．点Pを$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$となるように定め，線分ABと線分OPの交点をQ，線分BQの中点をRとする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 内積$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$の値を求めよ．

(2) $\overrightarrow{OQ}$を$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{OR}$を$\overrightarrow{OA}$と$\overrightarrow{OB}$を用いて表せ．

(4) $\overrightarrow{OR}$と$\overrightarrow{AB}$が垂直になるとき，aの値と三角形OQRの面積を求めよ．

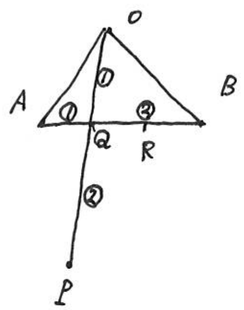
(1) $|\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{OB}|=\sqrt{a^2+9}$ より

$|\overrightarrow{OA}|^2-6\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+9|\overrightarrow{OB}|^2=a^2+9$

$|\overrightarrow{OA}|=a$, $|\overrightarrow{OB}|=1$ より $\underline{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0}$ //

(2) $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OQ}$ なので

$\underline{\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}}$ //



(3) $\underline{\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}}$ //

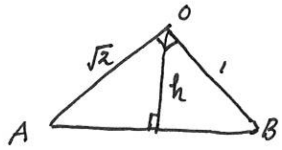
(4) $\overrightarrow{OR}\perp\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より.

$\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=-\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{3}=0$

$a>0$ より.

$\therefore \underline{a=\sqrt{2}}$ //

$AB=\sqrt{3}$ (∵三平方の定理)



$\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\frac{\sqrt{2}}{2}$

一方 $\triangle OAB=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot h$ $\therefore h=\frac{\sqrt{6}}{3}$

$\therefore \triangle OQR=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}AB\cdot h$

$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}$

$=\underline{\frac{\sqrt{2}}{6}}$ //