



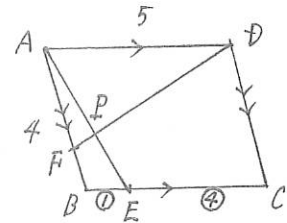
2016年人文社会科学第2問

2 平行四辺形 ABCD において、 $\vec{AB} = \vec{a}$ 、 $\vec{AD} = \vec{b}$ とおき、

$$|\vec{a}| = 4, \quad |\vec{b}| = 5, \quad |\vec{AC}| = 6$$

であるとする。また、辺 BC を 1 : 4 に内分する点を E、辺 AB を $s : (1-s)$ に内分する点を F とし (ただし、 $0 < s < 1$)、線分 AE と線分 DF の交点を P とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) \vec{a} と \vec{b} の内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ の値を求めよ。
- (2) \vec{AP} を \vec{a} 、 \vec{b} および s で表せ。
- (3) 平行四辺形 ABCD の 2 本の対角線 AC と BD の交点を Q とする。PQ が \vec{b} と平行であるとき、 s の値を求めよ。



(1) 余弦定理より。

$$\cos \angle ABC = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}$$

$$\angle ABC + \angle BAD = 180^\circ \text{ より } \cos \angle BAD = -\frac{1}{8}$$

$$\therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle BAD = 4 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{5}{2} //$$

$$(2) \vec{AE} = \vec{a} + \frac{1}{5} \vec{b}$$

A, P, E は同一直線上にあるので、 $\vec{AP} = k \vec{AE}$ (k : 実数) と表せよ。

$$\therefore \vec{AP} = k \vec{a} + \frac{1}{5} k \vec{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

一方、FP : PD = $t : 1-t$ ($0 < t < 1$) とおくと、

$$\begin{aligned} \vec{AP} &= (1-t) \vec{AF} + t \vec{b} \\ &= s(1-t) \vec{a} + t \vec{b} \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ の係数を比較して } k = s(1-t) \text{ かつ } \frac{1}{5} k = t$$

$$\therefore k = \frac{5s}{s+5} \quad \therefore \textcircled{1} \text{ より } \vec{AP} = \frac{5s}{s+5} \vec{a} + \frac{s}{s+5} \vec{b} //$$

(3) 平行四辺形の 2 本の対角線は中点で交わるから $\vec{AQ} = \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{2} \vec{b}$

$$\therefore \vec{PQ} = \vec{AQ} - \vec{AP} = \left(\frac{1}{2} - \frac{5s}{s+5}\right) \vec{a} + \left(\frac{1}{2} - \frac{s}{s+5}\right) \vec{b}$$

$$\text{これが } \vec{b} \text{ と平行より } \frac{1}{2} - \frac{5s}{s+5} = 0 \quad \therefore s = \frac{5}{9} //$$