立教大学

2015年 経済（経済、会計）・観光（観光）・コミュ（スポーツ） 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ aとbは1以上5以下の自然数とし，放物線$C: y=-x^2+ax-b$を定める．このとき，次の問に答えよ．

(1) 放物線Cがx軸と相異なる2点で交わるような$(a,\ b)$の組は何通りあるか求めよ．

(2) 放物線Cがx軸と相異なる2点で交わり，それらのx座標がともに整数であるような$(a,\ b)$の組は何通りあるか求めよ．

(3) (2)のとき，放物線Cとx軸の2つの交点の間の距離の最大値と，そのときの$(a,\ b)$の組を求めよ．

(4) kは自然数であり，直線$y=kx+1$は放物線Cと接している．このときのkの最大値と，kを最大にする$(a,\ b)$の組を求めよ．

(1) $-x^2+ax-b=0$の判別式をDとすると，Cとx軸が相異なる2点で交わることから

$D=a^2-4b>0$

これをみたすのは，$(a,b)=(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5)$

の10通り //

(2) (1)で求めた(a,b)のうち，$D=$(平方数)となるのは，必要条件 $\left(x=\dfrac{a\pm\sqrt{D}}{2}\right.$ であるから$\left.\right)$

$(a,b)=(3,2),(4,3),(5,4)$

逆に，これらのとき，交点のx座標はともに整数となる　∴ 3通り //

(3) 最大値 3，$(a,b)=(5,4)$のとき //

(4) 直線$y=kx+1$とCが接する $\Longleftrightarrow$ 方程式 $kx+1-(-x^2+ax-b)=0$ が重解をもつ

$x^2+(k-a)x+(b+1)=0$ の判別式をD'とすると，

$D'=(k-a)^2-4(b+1)=0$

∴ $k-a=\pm2\sqrt{b+1}$

∴ $k=a\pm2\sqrt{b+1}$

kは自然数より，bは3

∴ kの最大値は9，$(a,b)=(5,3)$のとき //