0002099180097999

岩手大学

2015年 人文社会科学 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ Oを原点とする座標空間に3つの点 A(2, 1, 0), B(5, 2, −1), C(1, −5, 1) をとる．$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，また，3点O, A, Bを通る平面をSとする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ を求めよ．また，$\cos\angle AOB$ を求めよ．

(2) △OABの面積を求めよ．

(3) 点Cから平面Sに下ろした垂線と平面Sとの交点をPとする．$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす s, t を求めよ．

(4) 四面体OABCの体積を求めよ．

(1) $\underline{|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5},\ |\vec{b}|=\sqrt{5^2+2^2+(-1)^2}=\sqrt{30}}$ //

$$\cos\angle AOB=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$=\frac{2\cdot5+1\cdot2+0\cdot(-1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{30}}$$

$$=\underline{\frac{2\sqrt{6}}{5}}\ //$$

(2) (1)より．$\sin\angle AOB=\frac{1}{5}$

$$\therefore \triangle OAB=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\angle AOB=\underline{\frac{\sqrt{6}}{2}}\ //$$

(3) $\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}=(1-2s-5t,\ -5-s-2t,\ 1+t)$

$\overrightarrow{PC}\perp S \iff \overrightarrow{PC}\perp\vec{a}$ かつ $\overrightarrow{PC}\perp\vec{b}$

$\iff \overrightarrow{PC}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{PC}\cdot\vec{b}=0$

$\therefore\ 2-4s-10t-5-s-2t=0$ かつ $5-10s-25t-10-2s-4t-1-t=0$

$$\begin{cases}5s+12t=-3\\2s+5t=-1\end{cases}\qquad \therefore\ \underline{s=-3,\ t=1}\ //$$

(4) $\overrightarrow{OP}=-3\vec{a}+\vec{b}$ より $\overrightarrow{PC}=3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=12,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=-6,\ \vec{c}\cdot\vec{a}=-3,\ |\vec{a}|=\sqrt{5},\ |\vec{b}|=\sqrt{30},\ |\vec{c}|=3\sqrt{3}$ より

$$|\overrightarrow{PC}|^2=9|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-6\vec{a}\cdot\vec{b}+6\vec{c}\cdot\vec{a}-2\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$$=24$$

$\therefore |\overrightarrow{PC}|=2\sqrt{6}$

$$S=\triangle OAB\cdot|\overrightarrow{PC}|\cdot\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot2\sqrt{6}\cdot\frac{1}{3}=\underline{2}\ //$$