岩手大学

2015年 工学部 第1問　＊(4)は旧課程のため，答えのみ

数理 石井K

1　必答問題(1)，(2)の2問と，選択問題(3)，(4)のいずれか1問を選択し，計3問を解答せよ．

(1)（必答）2つのベクトル $\vec{a}=(-2,\ 1,\ 2)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 0)$ について，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とする．t がすべての実数値をとって変化するとき，$|\vec{p}|$ の最小値を求めよ．

(2)（必答）3直線 $4x-3y+3=0$，$x-4y+4=0$，$3x+y-14=0$ で作られる三角形の面積を求めよ．

(3)（選択）複素数 $z=2\left(\cos\frac{11}{12}\pi+i\sin\frac{11}{12}\pi\right)$ のとき，z^2，z^{-3} および $\left|z-\frac{1}{z}\right|^2$ を求めよ．ただし，i は虚数単位とする．

$A^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2^n+2\cdot5^n & -2^{n+1}+2\cdot5^n\\ -2^n+5^n & 2^{n+1}+5^n\end{pmatrix}$

(4)（選択）2つの行列 $A=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix}$ について，$B^{-1}AB$，$(B^{-1}AB)^n$ および A^n を求めよ．ただし，n は正の整数とする．

$B^{-1}AB=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}$，$(B^{-1}AB)^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 5^n\end{pmatrix}$

(1) $|\vec{a}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+2^2}=3$，$|\vec{b}|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=(-2)\cdot(-1)+1\cdot1+2\cdot0=3$

$$|\vec{p}|^2=|\vec{a}|^2+2t\,\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$$
$$=2t^2+6t+9$$
$$=2\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{2}$$

∴ $t=-\frac{3}{2}$ のとき，$|\vec{p}|^2$ は最小値 $\frac{9}{2}$ をとる．すなわち，$|\vec{p}|$ の最小値は $\underline{\frac{3\sqrt{2}}{2}}$ //

(2) 3直線の交点は，A(0, 1)，B(4, 2)，C(3, 5)

これらの点を y 軸方向に -1 平行移動して，A′(0, 0)，B(4, 1)，C(3, 4)

∴ $\triangle A'B'C'=\frac{1}{2}|4^2-1\cdot3|=\underline{\frac{13}{2}}$ //

(3) ド・モアブルの定理 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ より．(n：整数)

$z^2=2^2\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=\underline{2\sqrt{3}-2i}$ //

$z^{-3}=2^{-3}\left(\cos\left(-\frac{11}{4}\pi\right)+i\sin\left(-\frac{11}{4}\pi\right)\right)=\frac{1}{8}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\underline{-\frac{\sqrt{2}}{16}-\frac{\sqrt{2}}{16}i}$ //

$$\left|z-\frac{1}{z}\right|^2=\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(\overline{z-\frac{1}{z}}\right)=\left(z-\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}-\frac{1}{\bar{z}}\right)=\underbrace{|z|^2}_{=4}\underbrace{-\frac{z}{\bar{z}}-\frac{\bar{z}}{z}}_{通分する}+\underbrace{\frac{1}{|z|^2}}_{=\frac{1}{4}}$$

$$∴\left|z-\frac{1}{z}\right|^2=4-\frac{z^2+(\bar{z})^2}{|z|^2}+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}-\frac{z^2+\overline{z^2}}{4}$$
$$=\frac{17}{4}-\frac{2\sqrt{3}-2i+(2\sqrt{3}+2i)}{4}=\underline{\frac{17}{4}-\sqrt{3}}$$ //