岩手大学

2016年 理工学部 第4問

$\boxed{4}$ 数列 $\{a_n\}$ が，

$$a_1 = 1, \quad \frac{(1-a_{n+1})a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{(1+a_{n+1})a_n} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．ただし，すべての自然数 n について $a_n > 0$ とする．

(1) 数列 $\{b_n\}$ が $b_n = \dfrac{1}{{a_n}^2}$ で与えられるとき，b_2，b_3，b_4 の値を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 不等式 $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \sum_{k=1}^{n} a_k$ が成り立つことを示せ．

(1) (与式) $\iff {a_{n+1}}^2 = (1-{a_{n+1}}^2){a_n}^2$

$\iff \dfrac{1}{b_{n+1}} = \left(1 - \dfrac{1}{b_{n+1}}\right)\dfrac{1}{b_n}$

$\iff b_n = b_{n+1} - 1$

$\iff b_{n+1} = b_n + 1$

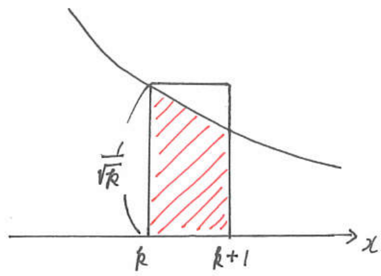
$b_1 = \dfrac{1}{{a_1}^2} = 1$ より． $\underline{b_2 = 2,\ b_3 = 3,\ b_4 = 4}$ //

(2) (1)より $\{b_n\}$ は初項1，公差1の等差数列なので，$b_n = n$

$a_n > 0,\ b_n = \dfrac{1}{{a_n}^2}$ より． $\underline{a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ //

(3) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ は単調減少する関数なので

$k \leqq x \leqq k+1$ を考えると，



$$\underbrace{\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx}_{\text{斜線部分の面積}} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot 1}_{\text{長方形}}$$

よって．k が 1 から n まで動くとき．足し合わせると．

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < \sum_{k=1}^{n} a_k \quad ▨$$