



2016年 教育学部 第3問

3 次の問いに答えよ。

- (1) ユークリッドの互除法を用いて、89と29の最大公約数を求めよ。  
 (2) 2元1次不定方程式  $89x + 29y = 1$  の整数解を1組求めよ。  
 (3) 2元1次不定方程式  $89x + 29y = -20$  の整数解として現れる  $x$  の値のうち、正のものを小さい順に  $x_1, x_2, x_3, \dots$  とする。このとき、自然数  $m$  に対して、 $x_m$  を  $m$  で表せ。  
 (4) (3) で定めた  $x_m$  に対し、 $89x_m + 29y = -20$  を満たす  $y$  の値を  $y_m$  とするとき、自然数  $n$  に対して、 $\sum_{m=1}^n (3x_m + y_m)^2$  を  $n$  で表せ。

(1)  $89 = 29 \times 3 + 2 \dots \textcircled{1}$

$29 = 2 \times 14 + 1 \dots \textcircled{2}$

よって、最大公約数は1 //

(2)  $\textcircled{2}$  より、 $1 = 29 - 2 \times 14 \dots \textcircled{3}$

$\textcircled{1}$  より、 $2 = 89 - 29 \times 3 \dots \textcircled{4}$

$\textcircled{4}$  を  $\textcircled{3}$  に代入して、 $1 = 29 - (89 - 29 \times 3) \times 14$

$\therefore 1 = 89 \cdot (-14) + 29 \cdot 43 \dots \textcircled{5}$

整数解の1つは、 $(x, y) = (-14, 43)$  //

(3)  $\textcircled{5}$  の両辺に  $-20$  をかけて、 $89 \cdot 280 + 29 \cdot (-860) = -20 \dots \textcircled{6}$

$89x + 29y = -20 \dots \textcircled{7}$

$\textcircled{7} - \textcircled{6}$  より、 $89(x - 280) + 29(y + 860) = 0$

$\therefore 89(x - 280) = -29(y + 860)$

89と29は互いに素より、 $x - 280$  は29の倍数で  $x - 280 = 29k$  ( $k$  は整数) と表せる。

そのとき、 $y + 860 = -89k$

$x > 0$  となるのは  $k \geq -9$  のときであるから、 $m = k + 10 \iff k = m - 10$

$\therefore x_m = 29(m - 10) + 280 \quad \therefore x_m = 29m - 10 //$

(4)  $y_m = -860 - 89(m - 10) \quad \therefore y_m = -89m + 30$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n (3x_m + y_m)^2 &= \sum_{m=1}^n 4m^2 \\ &= 4 \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) // \end{aligned}$$