2013年 理工学部 第2問

2 原点をOとする座標空間に3点A(1, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)がある.

(1) △ABCの面積を求めよ.

(2) A, B, Cの定める平面をαとする. Oからαに下ろした垂線とαとの交点をHとするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}} = s\overrightarrow{\mathrm{AB}} + t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

を満たすような実数s, tの値を求めよ. また, Hの座標を求めよ.

(3) 四面体OABCに内接する球の半径rを求めよ.

(1) $\triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$

$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3)$ であるから, $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{10}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 1$

$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2}\sqrt{5\cdot 10 - 1} = \underline{\frac{7}{2}}$ //

(2) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = (1, 0, 0) + s(-1, 2, 0) + t(-1, 0, 3) = (-s-t+1, 2s, 3t)$

$\overrightarrow{OH} \perp \alpha$ より. $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ かつ $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

$\therefore (-s-t+1, 2s, 3t)\cdot(-1, 2, 0) = s+t-1+4s$ 　　$\therefore 5s+t-1 = 0 \cdots①$

$(-s-t+1, 2s, 3t)\cdot(-1, 0, 3) = s+t-1+9t$ 　　$\therefore s+10t-1 = 0 \cdots②$

②$-10\times$①より. $-49s+9=0$ 　$\therefore \underline{s = \frac{9}{49},\ t = \frac{4}{49}}$ //

そのとき $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)$ 　$\therefore \underline{H\left(\frac{36}{49}, \frac{18}{49}, \frac{12}{49}\right)}$ //

(3) $\triangle OAB = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2 = 1$, $\triangle OBC = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3 = 3$, $\triangle OCA = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3 = \frac{3}{2}$, $\triangle ABC = \frac{7}{2}$

四面体OABCは. これらの三角形を底面とする高さrの三角すいに分割できるので

四面体OABCの体積が $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2} = 1$ であることより.

$$\frac{1}{3}\left(1+3+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\times r = 1$$

$\therefore 3r = 1$

$\therefore \underline{r = \frac{1}{3}}$ //