島根大学

2013年 医学部 第4問

4 空間における3点A(1, 1, −1), B(3, 2, 1), C(−1, 3, 0)を通る平面をαとするとき，次の問いに答えよ.

(1) △ABCは直角二等辺三角形であることを示せ.

(2) 原点Oから平面αに垂線を下ろし，その交点をHとするとき，点Hの座標を求めよ.

(3) 四面体OABCに外接する球の中心の座標を求めよ.

(1) $\overrightarrow{AB}=(2,1,2)$ より $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=3$

$\overrightarrow{AC}=(-2,2,1)$ より $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=3$

また，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\cdot(-2)+1\cdot2+2\cdot1=0$ より，$AB\perp AC$

以上より，△ABCは $AB=AC$，$\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形である ▨

(2) 点Hは平面α上にあるので

$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ (s,tは実数)と表せる.

$$\begin{aligned}\therefore\ \overrightarrow{OH}&=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{OA}\\&=s(2,1,2)+t(-2,2,1)+(1,1,-1)\\&=(2s-2t+1,\ s+2t+1,\ 2s+t-1)\quad\cdots(*)\end{aligned}$$

$OH\perp\alpha$ より $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ かつ $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}&=2(2s-2t+1)+s+2t+1+2(2s+t-1)\\&=9s+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}&=-2(2s-2t+1)+2(s+2t+1)+2s+t-1\\&=9t-1\end{aligned}$$

$\therefore\ s=-\frac{1}{9},\ t=\frac{1}{9}$ (*)に代入して，$\underline{H\left(\frac{5}{9},\ \frac{10}{9},\ -\frac{10}{9}\right)}$ //

(3) 球の中心をD(x,y,z)とおくと，OD=AD=BD=CDより

$x^2+y^2+z^2=(x-1)^2+(y-1)^2+(z+1)^2$ $\quad\therefore\ 2x+2y-2z=3\ \cdots①$

$x^2+y^2+z^2=(x-3)^2+(y-2)^2+(z-1)^2$ $\quad\therefore\ 3x+2y+z=7\ \cdots②$

$x^2+y^2+z^2=(x+1)^2+(y-3)^2+z^2$ $\quad\therefore\ x-3y=-5\ \cdots③$

①〜③より，$(x,y,z)=\underline{\left(\frac{7}{10},\ \frac{19}{10},\ \frac{11}{10}\right)}$ //