

数理
石井K

2014年文系第3問

3 関数 $f(x) = px^3 + qx^2 + rx + s$ は、 $x=0$ のとき極大値 M をとり、 $x=\alpha$ のとき極小値 m をとるとい
う。ただし $\alpha \neq 0$ とする。このとき、 p, q, r, s を α, M, m で表せ。

$$f'(x) = 3px^2 + 2qx + r$$

$$x=0, \alpha \text{ で極値をとることから。 } f'(0) = 0, f'(\alpha) = 0$$

$$\therefore r = 0, 3p\alpha^2 + 2q\alpha = 0$$

$$\alpha \neq 0 \text{ より, } r = 0, 3p\alpha + 2q = 0 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{また, } f(0) = s = M, f(\alpha) = p\alpha^3 + q\alpha^2 + r\alpha + s = m$$

$$\therefore s = M, p\alpha^3 + q\alpha^2 + M = m \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より, } p\alpha^3 + \left(-\frac{3p\alpha}{2}\right) \cdot \alpha^2 + M = m$$

$$\therefore \frac{1}{2}p\alpha^3 = M - m \quad \therefore p = \frac{2(M-m)}{\alpha^3}$$

$$\text{このとき, } q = -\frac{3\alpha}{2} \cdot \frac{2(M-m)}{\alpha^3} = -\frac{3(M-m)}{\alpha^2}$$

上の議論だけでは逆になっている
可能性が残る。

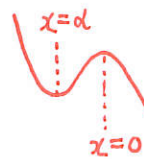
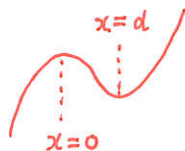
逆に、このとき、 $x=0$ で極大値、 $x=\alpha$ のとき極小値をとる

上の議論は必要条件であり、十分条件になっているか確認した。3次関数なので $M > m$

$\alpha < 0$ のときは、 $p < 0$ となり、グラフは

$\alpha > 0$ のときは、 $p > 0$ となり、

グラフは、



∴ 確かに、条件をみたしている。

$$\therefore p = \frac{2(M-m)}{\alpha^3}, q = -\frac{3(M-m)}{\alpha^2}, r = 0, s = M$$

(注) 十分性については

予備校等が出している解答
の一部では書かれていない

ものもあるが、一行だけでも
書いておくべき。

僕だったら、確実に

減点します。