



2011 年 第 4 問

4 実数を成分に持つ行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ とベクトル $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ について, 以下の問いに答えよ. ただし, $b \neq 0$ とする.

(1) $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき, $AP = \alpha P$ と $y > 0$ を満たす α と y を求めよ.

(2) 次の 3 条件を満たす β , z , w を求めよ.

$$AQ = \beta Q, \quad z^2 + w^2 = 1, \quad z < w$$

(3) (1) と (2) で定められた α , β , x , y , z , w を用いて, 次式を計算せよ.

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & w \end{pmatrix}$$

(4) (3) の結果を用いて, A^n を求めよ. ただし, n は 1 以上の自然数とする.