0002204095977999

学習院大学

2016年 経済学部 第3問

$\boxed{3}$ 曲線 $C: y=x^3-x$ 上に，原点とは異なる点Pがある．PでのCの接線を ℓ とし，ℓ とCの交点でP以外のものをQとする．さらに，原点を通り ℓ に平行な直線を m とする．

(1) m と C は相異なる3点で交わることを示せ．
(2) m と C の原点以外の交点をR，Sとするとき，$\dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{RS}}$ を求めよ．

(1) $P(t, t^3-t)$ $(t \neq 0)$ とおくと，$y'=3x^2-1$ より

$\ell: y=(3t^2-1)(x-t)+t^3-t$

$\therefore \ell: y=(3t^2-1)x-2t^3$

$\therefore x^3-x-\{(3t^2-1)x-2t^3\}=0 \iff x^3-3t^2x+2t^3=0$

$\iff (x-t)^2(x+2t)=0$

$\therefore Q(-2t, -8t^3+2t)$

また，$m: y=(3t^2-1)x$

$\therefore x^3-x-(3t^2-1)x=0 \iff x^3-3t^2x=0$

$\iff x(x+\sqrt{3}t)(x-\sqrt{3}t)=0$

$\iff x=0, \pm\sqrt{3}t$

$\therefore t \neq 0$ より，m と C は相異なる3点 $(0,0)$，$(\sqrt{3}t, 3\sqrt{3}t^3-\sqrt{3}t)$，$(-\sqrt{3}t, -3\sqrt{3}t^3+\sqrt{3}t)$ で交わる ▨

(2) (1)より，$PQ^2=\{t-(-2t)\}^2+\{t^3-t-(-8t^3+2t)\}^2$

$=9t^2+81t^6-54t^4+9t^2$

$=9t^2(9t^4-6t^2+2)$

$RS^2=\{\sqrt{3}t-(-\sqrt{3}t)\}^2+\{3\sqrt{3}t^3-\sqrt{3}t-(-3\sqrt{3}t^3+\sqrt{3}t)\}^2$

$=12t^2+108t^6-72t^4+12t^2$

$=12t^2(9t^4-6t^2+2)$

$\therefore \left(\dfrac{PQ}{RS}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

$\dfrac{PQ}{RS}>0$ より，$\underline{\dfrac{PQ}{RS}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ //