2017年 医学部 第11問

増田

$\boxed{11}$ 3つの直線 $x-y+2=0$, $x+y-12=0$, $7x-y-4=0$ で囲まれた三角形に内接する円の面積を S とする．$\dfrac{4S}{\pi}$ の値を求めよ．

$$\begin{cases} x-y+2=0 & \cdots ① \\ x+y-12=0 & \cdots ② \\ 7x-y-4=0 & \cdots ③ \end{cases}$$

① と ② の交点は $A(5,7)$

② と ③ の交点は $B(2,10)$

① と ③ の交点は $C(1,3)$

点Cを原点にもっていくために、x 方向に -1, y 方向に -3 移動させると

$A'(4,4)$, $B'(1,7)$, $C'(0,0)$

$\triangle A'B'C'$ の面積は、サラスの公式より

$$(\triangle A'B'C' \text{の面積}) = \frac{1}{2}\left|4\times7-4\times1\right| = \frac{24}{2} = 12$$

次に、三角形の辺の長さは $AB=\sqrt{(-3)^2+3^2}=3\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{1^2+7^2}=5\sqrt{2}$

$AC=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

内接円の半径を r とすると、

$$\frac{1}{2}r(AB+BC+AC)=\frac{r}{2}\times12\sqrt{2}=12$$

$$\therefore r=\sqrt{2}$$

よって円の面積 $S=\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\pi=2\pi$

$$\frac{4S}{\pi}=\frac{4\times2\pi}{\pi}=\underline{8}$$