0000373186269999

山口大学

2010年 第3問

3 n を自然数とするとき，

$$2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}k(k-1)=(-1)^{n+1}n^2+\frac{(-1)^n-1}{2}$$

が成り立つことを示しなさい．

$$(\text{左辺}) = 2\{1\cdot 0 - 2\cdot 1 + 3\cdot 2 - 4\cdot 3 + 5\cdot 4 - 6\cdot 5 + \cdots + (-1)^n\cdot(n-1)(n-2) + (-1)^{n+1}n(n-1)\}$$

(i) n が偶数のとき．

$$(\text{左辺}) = 2\{1\cdot 0 + 3\cdot 2 + 5\cdot 4 + \cdots + (n-1)\cdot(n-2)\} - 2\{2\cdot 1 + 4\cdot 3 + 6\cdot 5 + \cdots + n\cdot(n-1)\}$$

正の項と負の項を分けた

$$= 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(2k-1)(2k-2) - 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}2k\cdot(2k-1)$$

再び Σ で表す．

$$= 2\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(-4k+2)$$

Σ の公式により

$$= -n^2$$

一方，(右辺) は n：偶数のとき．(右辺) $= -n^2$ ∴ 成り立つ

(ii) n が奇数のとき．$n=1$ であれば (左辺) $= 2\cdot(-1)^2\cdot 1\cdot 0 = 0$，(右辺) $= 1-1=0$

となり成り立つので，$n \geqq 3$ とする．

このとき．
$$(\text{左辺}) = \left\{2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}k(k-1)\right\} + 2(-1)^{n+1}n(n-1)$$

n のときだけ外に出す．

$n-1$：偶数より (i) が使える．

$$= (-1)^n(n-1)^2 + \frac{(-1)^{n-1}-1}{2} + 2n(n-1)$$

$$= -(n-1)^2 + 2n^2 - 2n$$

$$= n^2 - 1$$

一方，(右辺) $= n^2-1$ となり成り立つ

(i), (ii) より．n が自然数のとき．与式は成り立つ ▨

赤下線のように工夫すると速く解けるが，(i) と同じようにして (ii) を示しても，もちろん正解となる．