福島県立医科大学

2014年 医学部 第2問

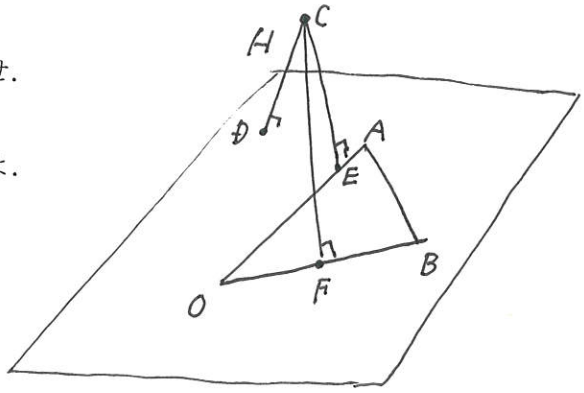
$\boxed{2}$ $OA = OB = 1$，$\angle AOB < \frac{\pi}{2}$ の $\triangle OAB$ を含む平面を H とする．平面 H 上に無い点Cから平面 H，直線OA，直線OBに下ろした垂線の足をそれぞれD，E，Fとする．$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$，$\vec{c} = \overrightarrow{OC}$，$p = \vec{a} \cdot \vec{b}$，$q = \vec{b} \cdot \vec{c}$，$r = \vec{c} \cdot \vec{a}$ として，以下の問いに答えよ．ただし，$\vec{a} \cdot \vec{b}$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積である．

(1) $\vec{a} \cdot \overrightarrow{DE} = 0$ であることを示せ．

(2) $\overrightarrow{OE}$ と $\overrightarrow{OF}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および p，q，r で表せ．

(3) EFの長さを p，q，r で表せ．

(4) $p = \frac{1}{5}$，$q = 1$，$r = 2$ であるとき，ODの長さを求めよ．



(1) $\overrightarrow{CD} \cdot \vec{a} = 0$，$\overrightarrow{CE} \cdot \vec{a} = 0$ より

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{DE} = \vec{a} \cdot (\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD})$$
$$= \vec{a} \cdot \overrightarrow{CE} - \vec{a} \cdot \overrightarrow{CD}$$
$$= 0 \quad \blacksquare$$

(2) $\overrightarrow{OE} = k\vec{a}$ と表せるので，$\overrightarrow{CE} = k\vec{a} - \vec{c}$

$$\therefore \vec{a} \cdot \overrightarrow{CE} = k|\vec{a}|^2 - \vec{a} \cdot \vec{c}$$
$$= k - r$$
$$= 0$$
$$\therefore k = r$$
$$\therefore \underline{\overrightarrow{OE} = r\vec{a}}$$ //

同様に $\overrightarrow{OF} = l\vec{b}$ と表せるので $\overrightarrow{CF} = l\vec{b} - \vec{c}$

$$\therefore \vec{b} \cdot \overrightarrow{CF} = l|\vec{b}|^2 - q$$
$$= l - q$$
$$= 0$$
$$\therefore l = q$$
$$\therefore \underline{\overrightarrow{OF} = q\vec{b}}$$ //

(3) $\overrightarrow{EF} = q\vec{b} - r\vec{a}$ $\quad \therefore |\overrightarrow{EF}|^2 = q^2 + r^2 - 2qrp$

$$\therefore \underline{EF = \sqrt{q^2 + r^2 - 2pqr}}$$ //

(4) (1) より $\vec{a} \cdot (\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OD}) = 0$

ここで $\overrightarrow{OD} = s\vec{a} + t\vec{b}$ とおくと．

$$\vec{a} \cdot r\vec{a} - (s + tp) = 0$$
$$\therefore s + tp = r$$
$$\therefore s + \frac{1}{5}t = 2 \quad \cdots ①$$

(1) と同様にすると．

$\vec{b} \cdot \overrightarrow{DF} = 0$ が成り立つ

$$\therefore \vec{b} \cdot (\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD}) = 0$$
$$\therefore \frac{1}{5}s + t = 1 \quad \cdots ②$$

①，② より $s = \frac{15}{8}$，$t = \frac{5}{8}$

$$\therefore \overrightarrow{OD} = \frac{15}{8}\vec{a} + \frac{5}{8}\vec{b}$$
$$\therefore |\overrightarrow{OD}|^2 = \frac{225}{64} + \frac{25}{64} + \frac{150}{64} \times \frac{1}{5}$$
$$= \frac{280}{64}$$
$$= \frac{35}{8}$$
$$\therefore \underline{|\overrightarrow{OD}| = \frac{\sqrt{70}}{4}}$$ //