0001495544058999

東北学院大学

2013年 文系 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $3^{x+1} \leqq 11 + 4 \times 3^{-x}$ を解け．

(2) n を2以上の整数とする．n の n 乗が n 桁の数となるような n の値をすべて求めよ．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする．

(1). 両辺に $3^x\,(>0)$ をかけると，

$3^{2x+1} \leqq 11 \cdot 3^x + 4$ $\quad\therefore\ 3(3^x)^2 - 11 \cdot 3^x - 4 \leqq 0$

$$\begin{array}{ccc} 3 & & +1 \\ & \times & \\ 1 & & -4 \end{array}$$

$(3 \cdot 3^x + 1)(3^x - 4) \leqq 0$

$\therefore\ -\frac{1}{3} \leqq 3^x \leqq 4$ ここで $3^x > 0$ より，$0 < 3^x \leqq 4$

$\therefore$ 底が3の対数をとって，$x \leqq \log_3 4$ $\quad\therefore\ \underline{x \leqq 2\log_3 2}$ //

(2) n 桁の整数 N は，$10^{n-1} \leqq N < 10^n$ をみたすので，

$10^{n-1} \leqq n^n < 10^n$

$\therefore\ (n-1)\log_{10} 10 \leqq n \log_{10} n < n \log_{10} 10$

$\therefore\ n - 1 \leqq n \log_{10} n < n$

$\therefore\ 1 - \frac{1}{n} \leqq \log_{10} n < 1$

• $n = 2$ のとき．

$\frac{1}{2} \leqq \log_{10} 2 < 1$ となり．$\log_{10} 2 = 0.3010$ なので満たさない

• $n = 3$ のとき

$\frac{2}{3} \leqq \log_{10} 3 < 1$ となり $\log_{10} 3 = 0.4771$ なので満たさない

同様に，$n = 4$ のときは．$\frac{3}{4} \leqq \log_{10} 4 = 2 \cdot 0.3010 < 1$ 満たさない

$n = 5$ のときは．$\frac{4}{5} \leqq \log_{10} \frac{10}{2} = 1 - 0.3010 < 1$ 満たさない

$n = 6$ のときは．$\frac{5}{6} \leqq \log_{10} 2 \cdot 3 = 0.3010 + 0.4771 < 1$ 満たさない

$n = 7$ のときは．$\underset{\fallingdotseq 0.857\cdots}{\frac{6}{7}} \leqq \log_{10} 7 = 0.8451 < 1$ 満たさない

$n = 8$ のとき．$\frac{7}{8} \leqq \log_{10} 8 = 0.9030 < 1$ 満たす．

$n = 9$ のとき $\frac{8}{9} \leqq \log_{10} 9 = 0.9542 < 1$ 満たす．

$n = 10$ のとき満たさない．$\underline{\therefore\ n = 8, 9}$ //