首都大学東京

2014年 第3問

$\boxed{3}$ $f(x)=xe^{-x}$，$t>1$ とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{x}{t}$ のすべての交点の座標を求めなさい．

(2) (1)のような $y=f(x)$ と $y=\dfrac{x}{t}$ で囲まれる部分の面積 $S(t)$ を求めなさい．

(3) t が1より大きい実数全体を動くとき，関数 $g(t)=\dfrac{t}{\log t}(1-S(t))$ の最小値を求めなさい．

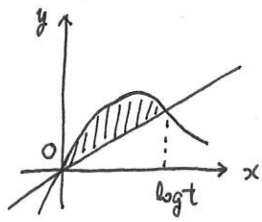
(1) $\dfrac{x}{t}=xe^{-x}$ より，$x\left(\dfrac{1}{t}-e^{-x}\right)=0$

$\therefore x=0$ または $e^{-x}=\dfrac{1}{t} \iff x=0,\ \log t$ $\quad\therefore \underline{(0,0),\ \left(\log t,\ \dfrac{\log t}{t}\right)}$ //

(2) $0\leqq x\leqq \log t$ において

$f(x)-\dfrac{x}{t}=x\left(\dfrac{1}{e^x}-\dfrac{1}{t}\right)\geqq 0$ より

グラフは右のようになる



$$\therefore S(t)=\int_0^{\log t} xe^{-x}-\frac{x}{t}\,dx$$

$$=\int_0^{\log t} x(-e^{-x})'-\frac{x}{t}\,dx$$

$$=\Big[-xe^{-x}\Big]_0^{\log t}-\int_0^{\log t}-e^{-x}\,dx-\Big[\frac{x^2}{2t}\Big]_0^{\log t}$$

$$=-\frac{\log t}{t}-\Big[e^{-x}\Big]_0^{\log t}-\frac{(\log t)^2}{2t}$$

$$=\underline{1-\frac{1}{t}-\frac{\log t}{t}-\frac{(\log t)^2}{2t}}\ //$$

(3) $$g(t)=\frac{t}{\log t}\left\{\frac{1}{t}+\frac{\log t}{t}+\frac{(\log t)^2}{2t}\right\}$$

$$=\frac{1}{\log t}+1+\frac{\log t}{2}$$

$t>1$ より，$\log t>0$

ここで，$\dfrac{1}{\log t}+\dfrac{\log t}{2}\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{\log t}\cdot\dfrac{\log t}{2}}=\sqrt{2}$ （相加・相乗の関係）

等号成立は $\dfrac{1}{\log t}=\dfrac{\log t}{2}$

$\therefore (\log t)^2=2 \quad \therefore \log t=\sqrt{2}$

$\therefore$ $\underline{g(t)\text{ の最小値は } 1+\sqrt{2}\ (t=e^{\sqrt{2}}\text{ のとき})}$ //