

2016年医学部第10問

10 点 z は複素数とする。点 z は、原点 O を中心とする半径 1 の円上を動く。 $w = \frac{6z-1}{2z-1}$ としたとき、 $|w|$ の最大値を M 、最小値を m とする。 $3(M-m)$ の値を求めよ。

$$\begin{aligned}
 |w|^2 &= w \cdot \bar{w} \\
 &= \frac{6z-1}{2z-1} \cdot \frac{6\bar{z}-1}{2\bar{z}-1} \\
 &= \frac{36|z|^2 - 6(z+\bar{z}) + 1}{4|z|^2 - 2(z+\bar{z}) + 1} \\
 &= \frac{37 - 6(z+\bar{z})}{5 - 2(z+\bar{z})} \quad (\because |z|=1 \text{ より}) \\
 &= \frac{3\{5 - 2(z+\bar{z})\} + 22}{5 - 2(z+\bar{z})} \\
 &= 3 + \frac{22}{5 - 2(z+\bar{z})}
 \end{aligned}$$

ここで、 $-2 \leq z + \bar{z} \leq 2$ なので

$$\frac{49}{9} \leq |w|^2 \leq 25$$

$$\therefore \frac{7}{3} \leq |w| \leq 5$$

$$\therefore M = 5, m = \frac{7}{3}$$

$$\therefore 3(M-m) = 15 - 7$$

$$= \underline{\underline{8}}$$