自治医科大学

2017年 医学部 第6問

増田

6 複素数 $Z = \dfrac{(1+i)^3(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}-3i)^2}$ について考える．Z^{2n} が実数となるときの自然数 n の最小値を求めよ．

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{3}-i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$\sqrt{3}-3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$$Z = \frac{(1+i)^3(\sqrt{3}-i)^2}{(\sqrt{3}-3i)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \times 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}{12\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left\{\cos\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(\cos\frac{13}{12}\pi + i\sin\frac{13}{12}\pi\right)$$

$$Z^{2n} = \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^{2n}\left(\cos\frac{13n}{6}\pi + i\sin\frac{13n}{6}\pi\right)$$

Z^{2n} が実数となるとき、$\sin\dfrac{13n}{6}\pi = 0$ となるので、

最小の自然数 n は　$n = 6$ //