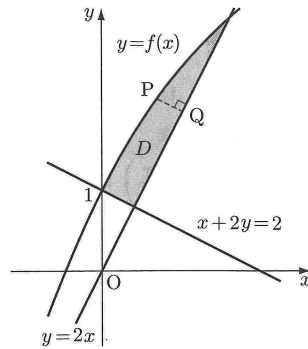


2014年 医学部 第5問

5 関数  $f(x) = 2x + \cos x$  がある.  $xy$  平面上の曲線  $y = f(x)$  の  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  の部分を  $C$  とし,  $C$  と直線  $y = 2x$ , および直線  $x + 2y = 2$  で囲まれた領域を  $D$  とする. 領域  $D$  を直線  $y = 2x$  の周りに 1 回転してできる立体の体積を求めよう.



$C$  上の点  $P(t, f(t))$  から直線  $y = 2x$  に下ろした垂線と直線  $y = 2x$  との交点を  $Q$  とする. 線分  $PQ$  の長さは

$$\frac{|\cos t|}{\sqrt{\text{ア}}}$$

であり, 点  $Q$  の  $x$  座標は

$$t + \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \cos t$$

である. これから,  $OQ = s$  とおくと

$$s = \sqrt{\text{エ}} \left( t + \frac{\text{イ}}{\text{ウ}} \cos t \right)$$

である.

$f'(x) = 2 - \sin x > 0$  なので  $f(x)$  は増加する. よって, 求める体積  $V$  は

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}\pi}{2}} \pi PQ^2 ds \\ &= \frac{\sqrt{\text{オ}}}{\text{カ}} \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \cos^2 t - \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \cos^2 t \sin t \right) dt \\ &= \frac{\sqrt{\text{ケ}}}{\text{コサ}} \pi^2 - \frac{\text{シ}}{\text{セソ}} \sqrt{\text{ス}} \pi \end{aligned}$$

である.