0001808811918999

福岡大学

2014年 理系 第9問

数理 石井K

$\boxed{9}$ $f(x)=(x+a)e^{-x}$ $(a \neq 0)$ とする．曲線 $y=f(x)$ が原点を通る接線をただ1つもつとき，次の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) a の値を求めよ．

(2) (1)のとき，この曲線と y 軸およびこの曲線の変曲点を通る接線とで囲まれる部分の面積を求めよ．

(1) $f'(x) = 1\cdot e^{-x} + (x+a)\cdot(-e^{-x})$

$= (1-x-a)e^{-x}$

接点を $(t, f(t))$ とおくと，接線は $y=(1-t-a)e^{-t}(x-t)+(t+a)e^{-t}$

$\therefore y=(1-t-a)e^{-t}\cdot x + e^{-t}(a+t^2+at)$

これが原点を通ることより，$t^2+at+a=0$

判別式を D とおくと，$D=a^2-4a=0$ $a \neq 0$ より $\underline{a=4}$ //

(2) (1)より $f''(x) = -e^{-x}+(1-x-a)\cdot(-e^{-x})$

$= (2-x-a)\cdot(-e^{-x})$

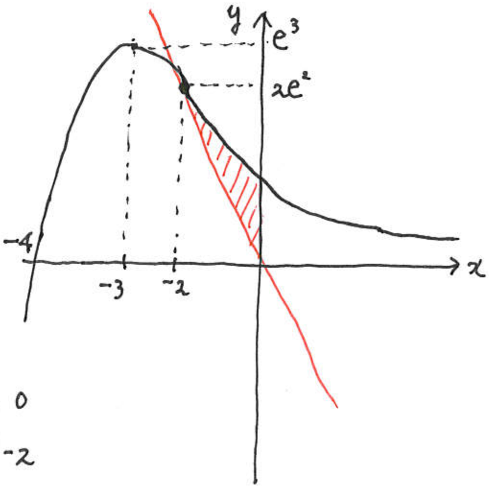
$= (x+2)\cdot e^{-x}$

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	e^3	↘	$2e^2$	↘
		極大		変曲点	

$\therefore$ 変曲点を通る接線は，

$y=-e^2(x+2)+2e^2$

$\therefore y=-e^2x$



$\therefore \int_{-2}^{0} (x+4)e^{-x}-(-e^2x)\,dx$

$= \int_{-2}^{0} (x+4)(-e^{-x})' + e^2x\,dx$

$= \Big[(x+4)\cdot(-e^{-x})\Big]_{-2}^{0} + \int_{-2}^{0} e^{-x}dx + \Big[\frac{e^2x^2}{2}\Big]_{-2}^{0}$

$= -4+2e^2+\Big[-e^{-x}\Big]_{-2}^{0}+(-2e^2)$

$= -5+3e^2-2e^2$

$= \underline{e^2-5}$ //