2013年 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 1個のさいころを n 回（$n=1, 2, 3, \cdots$）投げたとき，1の目が出る回数が偶数となる確率を p_n，奇数となる確率を q_n とする．ただし，0は偶数に含まれるものとする．以下の問いに答えよ．

(1) p_1，q_1，p_2，q_2 をそれぞれ求めよ．

(2) p_{n+1}，q_{n+1} をそれぞれ p_n と q_n を用いて表せ．

(3) $p_n - q_n$ を n を用いて表せ．

(4) p_n，q_n をそれぞれ n を用いて表せ．

(1) $\underline{p_1 = \frac{5}{6},\ q_1 = \frac{1}{6},\ p_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{13}{18},\ q_2 = 1 - p_2 = \frac{5}{18}}$ //

(2) $p_{n+1} = p_n \cdot \frac{5}{6} + q_n \cdot \frac{1}{6}$　　$\therefore \underline{p_{n+1} = \frac{5}{6}p_n + \frac{1}{6}q_n}$ // $\cdots$ ①

$\underline{q_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{5}{6}q_n}$ // $\cdots$ ②

(3) ① − ② より．

$$p_{n+1} - q_{n+1} = \frac{4}{6}p_n - \frac{4}{6}q_n$$
$$= \frac{2}{3}(p_n - q_n)$$

$\therefore \{p_n - q_n\}$ は．初項 $p_1 - q_1 = \frac{2}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列

$\therefore \underline{p_n - q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$ // $\cdots$ ③

(4) $p_n + q_n = 1$ $\cdots$ ④ であるから

③ + ④ より．　$2p_n = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n$　　$\therefore \underline{p_n = \frac{1}{2}\left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}$ //

④ − ③ より．　$2q_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$　　$\therefore \underline{q_n = \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}}$ //