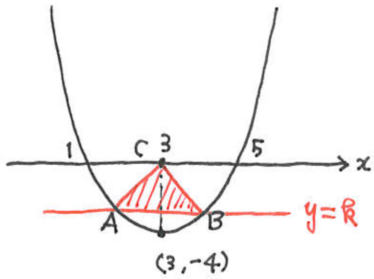
自治医科大学

2013年 第20問

数理 石井K

$\boxed{20}$ 放物線 $y=x^2-6x+5$ と直線 $y=k$ $(-4<k<0)$（k は実数）との2つの異なる交点をA，Bとする．A，Bと点C(3, 0)で作られる三角形ABCの面積の最大値を M とするとき，$\frac{3\sqrt{3}}{4}M$ の値を求めよ．

放物線と $y=k$ の交点の x 座標を求めると．



$$x^2-6x+5-k=0$$

$$\therefore\ x=\frac{6\pm\sqrt{36-4(5-k)}}{2}=3\pm\sqrt{k+4}$$

$$\therefore\ AB=2\sqrt{k+4}$$

このとき，三角形の高さは，$-k$ なので

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot2\sqrt{k+4}\cdot(-k)$$

$$=-k\sqrt{k+4}$$

$$=\sqrt{k^3+4k^2}$$

$f(k)=k^3+4k^2$ とおくと．

$$f'(k)=3k^2+8k$$

$$=k(3k+8)$$

k	(-4)	$\cdots$	$-\frac{8}{3}$	$\cdots$	(0)
$f'(k)$		$+$	0	$-$	
$f(k)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$\therefore\ f(k)$ は $k=-\frac{8}{3}$ のとき最大値 $\frac{2^8}{3^3}$ をとる

$$f\left(-\frac{8}{3}\right)=-\frac{8^3}{27}+\frac{4\cdot8^2}{9}$$

$$=\frac{12\cdot8^2-8^3}{27}$$

$$=\frac{2^8}{3^3}$$

$$\therefore\ M=\sqrt{\frac{2^8}{3^3}}=\frac{16}{3\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \frac{3\sqrt{3}}{4}M=\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{16}{3\sqrt{3}}=\underline{4}$$