# 自治医科大学

2015年 医学部 第6問

数理 石井K

$\boxed{6}$ 2つの放物線 $C_1: y=x^2$, $C_2: y=x^2-ax+a+\frac{a^3}{2}$（$a$は正の実数）について考える．直線$L$は$C_1$, $C_2$にそれぞれ点A，Bで接する．点A，Bの$x$座標をそれぞれ$p$, $q$としたとき，$p+q-a^2$の値を求めよ．

Lは，y軸に平行でないから $L: y=mx+n$ とおける．

$x^2-mx-n=(x-p)^2$ より，$m=2p$，$n=-p^2$ …①

点Aで接するので

$x^2-ax+a+\frac{a^3}{2}-mx-n=(x-q)^2$

点Bで接するので

∴係数を比べて，$a+m=2q$，$a+\frac{a^3}{2}-n=q^2$ …②

①，②より，m，nを消去すると，

$a+2p=2q$ …③ $\Leftrightarrow$ $p-q=-\frac{a}{2}$ …③′

$a+\frac{a^3}{2}+p^2=q^2$ …④ $\Leftrightarrow$ $(p+q)(p-q)+a+\frac{a^3}{2}=0$ …④′

③′を④′に代入して，

$-\frac{a}{2}(p+q)+a+\frac{a^3}{2}=0$

$\therefore -\frac{a}{2}(p+q-2-a^2)=0$

$a>0$ より $p+q-a^2=\underline{2}$ //