自治医科大学

2012年 第24問

数理 石井K

$\boxed{24}$ 2つの曲線C_1：$f(x)=x^3+3x^2$，C_2：$g(x)=x^3+3x^2+c$（$c>0$，cは実数定数）について考える．点$P(p,\ f(p))$におけるC_1の接線と点$Q(q,\ g(q))$におけるC_2の接線が一致するとき（$p \neq q$），$c=-A(p+1)^3$と表記される．Aの値を求めよ．

C_1の接線は、$f'(x)=g'(x)=3x^2+6x$より.

$$y=(3p^2+6p)(x-p)+p^3+3p^2 \qquad \therefore y=(3p^2+6p)x-2p^3-3p^2 \cdots ①$$

C_2の接線は、$y=(3q^2+6q)(x-q)+q^3+3q^2+c$

$$\therefore y=(3q^2+6q)x-2q^3-3q^2+c \cdots ②$$

①②より. $3p^2+6p=3q^2+6q$ かつ $-2p^3-3p^2=-2q^3-3q^2+c$

$\iff$ $p^2-q^2+2p-2q=0$ かつ $2p^3-2q^3+3p^2-3q^2+c=0$

$\iff$ $(p-q)(p+q+2)=0$ かつ $2(p-q)(p^2+pq+q^2)+3(p+q)(p-q)+c=0$

$\iff$ $p+q=-2$ かつ. $2\cdot(2p+2)\{p^2+p(-p-2)+(-p-2)^2\}-6(2p+2)+c=0$

$\therefore 4(p+1)(p^2+2p+4)-12p-12+c=0$

$\therefore 4(p^3+2p^2+4p+p^2+2p+4)-12p-12+c=0$

$\therefore 4p^3+12p^2+12p+4+c=0$

$\therefore c=-4(p+1)^3$

$\therefore \underline{A=4}$ //