0002403276957999

自治医科大学

2017年 医学部 第4問

増田

$\boxed{4}$ 方程式 $(\log_2 x)^2 \cdot \log_2(8x^2) = \alpha$ は，すべて異なる3つの実数解 $\dfrac{\beta}{\gamma}$，β，$\beta\gamma$ $(\gamma \fallingdotseq 0)$ をもつものとする．2α の値を求めよ．

$(\log_2 x)^2 \cdot \log_2(8x^2) = \alpha$ を変形して

$(\log_2 x)^2 \cdot (3 + 2\log_2 x) = \alpha$

$2(\log_2 x)^3 + 3(\log_2 x)^2 - \alpha = 0 \quad \cdots (*)$

方程式(＊)の答えが $x = \dfrac{\beta}{\gamma}$, β, $\beta\gamma$ だから、$\log_2\beta = b$, $\log_2\gamma = r$ とおいて

$$\log_2\frac{\beta}{\gamma} = \log_2\beta - \log_2\gamma = b - r$$

$$\log_2\beta = b$$

$$\log_2\beta\gamma = \log_2\beta + \log_2\gamma = b + r$$

を(＊)に代入する。

$$\begin{cases} 2(b-r)^3 + 3(b-r)^2 - \alpha = 0 & \cdots ① \\ 2b^3 + 3b^2 - \alpha = 0 & \cdots ② \\ 2(b+r)^3 + 3(b+r)^2 - \alpha = 0 & \cdots ③ \end{cases}$$

①＋③より　$2(2b^3 + 6br^2 + 3b^2 + 3r^2 - \alpha) = 0$

②より $= 0$

$\therefore\ r^2(2b+1) = 0$

$r = 0$ つまり $\log_2\gamma = 0$，$\gamma = 1$ のとき、「3つの異なる実数解」を満たさなくなるので、

$$2b + 1 = 0$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

これを②に代入して、

$$2\alpha = 4b^3 + 6b^2 = \underline{1}$$