

2016年文系F日程第2問

数理
石井K

2 3点 $A(-\sqrt{3}, -1)$, $B(\sqrt{3}, -1)$, $C(0, 2)$ を通る円と, この円周上の点 $P(x, y)$ がある (ただし, $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ とする). 以下の問に答えよ.

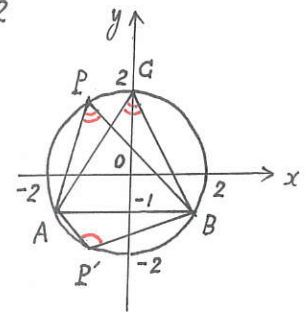
- (1) 円の方程式は $(x - \boxed{\text{コ}})^2 + (y - \boxed{\text{サ}})^2 = \boxed{\text{シ}}$ である.
- (2) $\angle APB = \boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}^\circ$ または $\boxed{\text{ソ}} \boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}}^\circ$ (ただし $\boxed{\text{ス}} \boxed{\text{セ}}^\circ < \boxed{\text{ソ}} \boxed{\text{タ}} \boxed{\text{チ}}^\circ$) である.
- (3) 原点を O とする. $\triangle PAB$ と $\triangle OAB$ の面積の比が $3:1$ となる時, $\angle PAB = \boxed{\text{ツ}} \boxed{\text{テ}}^\circ$ である.
- (4) P から線分 AB に下ろした垂線の足を Q とし, 線分 PQ を Q の側に延長して円と交わる点を T とするとき, $PQ^2 + TQ^2 = \boxed{\text{ト}} AQ \cdot BQ + \boxed{\text{ナ}}$ となる.

(1) $\triangle ABC$ は $AB = BC = CA = 2\sqrt{3}$ の正三角形より

外接円の中心は重心に一致する. よって中心は $(0, 0)$ 半径は 2

\therefore 円の方程式は $x^2 + y^2 = 4$

(2) 右図のように, $\angle APB = 60^\circ$ または 120°



(3) $\triangle OAB$ において辺 AB を底辺とみたときの高さは 1 であるから

$\triangle PAB$ において辺 AB を底辺とみたときの高さは 3 となる.

よって, $P = C$ であり, $\angle PAB = 60^\circ$

(4) $PQ^2 + TQ^2 = aAQ \cdot BQ + b$ とおく

$P(x, y)$ ($-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$) より $Q(x, -1)$, また $x^2 + y^2 = 4$

$$PQ^2 + TQ^2 = (y+1)^2 + (y-1)^2 = 2y^2 + 2 = 2(4-x^2) + 2 = 10 - 2x^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} aAQ \cdot BQ + b &= a \cdot (x+\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}-x) + b \\ &= -ax^2 + 3a + b \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

よって, ①②の係数を比べて, $a=2, b=4$

$$\therefore PQ^2 + TQ^2 = 2AQ \cdot BQ + 4$$