2016 年 第 2 問

$\boxed{2}$ 等比数列 $\{a_n\}$ と等差数列 $\{b_n\}$ を次の通りとする．

$$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-3}, \quad b_n = \frac{3\pi(n-1)}{4} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

これらを用いて，座標平面上の点 P_n を

$$\mathrm{P}_n(a_n \cos b_n,\ a_n \sin b_n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 点 P_4 が線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ の中点であることを示せ．

(2) 線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の長さ l_n を n の式で表せ．

(3) 極限値 $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} l_k$ を求めよ．

(4) 座標平面上の曲線 C が媒介変数 t と定数 α，β を用いて，

$$x = 2^{\alpha t+\beta} \cos t, \quad y = 2^{\alpha t+\beta} \sin t$$

と表されるとする．曲線 C が $t = 0$ で点 P_1 を通り，$t = \dfrac{3\pi}{4}$ で点 P_2 を通るとき，α，β の値を求めよ．

(5) (4) で求めた α，β の値に対し，曲線 C がすべての点 P_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を通ることを示せ．