高知工科大学

2012年 第1問

$\boxed{1}$ 次の各問に答えよ．

(1) 放物線 $y = x^2 - ax + 3$ の頂点が直線 $y = 3x + 5$ 上にあるとき，定数 a の値を求めよ．

(2) $\log_9 \sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\log_9 \dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{2}\log_9 \sqrt[3]{6}$ を簡単にせよ．

(3) 曲線 $y = \sqrt{x-1}$ 上の点 $(2,\ 1)$ における接線を ℓ とする．この曲線と x 軸および接線 ℓ で囲まれた部分の面積 S を求めよ．

(4) 行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $A^2 - 4A + 3E = O$ を満たすとき，$a+d$ の値を求めよ．ただし，O は零行列，E は単位行列である．

(1) $y = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4} + 3$　∴ 頂点の座標は $\left(\dfrac{a}{2},\ -\dfrac{a^2}{4} + 3\right)$ であるから

$y = 3x + 5$ に代入して，$-\dfrac{a^2}{4} + 3 = \dfrac{3}{2}a + 5$

∴ $a^2 + 6a + 8 = 0$　∴ $(a+2)(a+4) = 0$　∴ $\underline{a = -2,\ -4}$ //

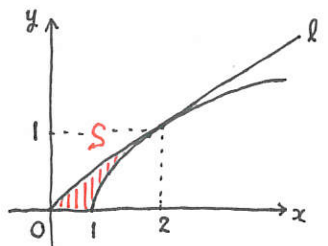
(2) (与式) $= \log_9 \sqrt{2} + \log_9 \left(\dfrac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} - \log_9 \left(6^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

$= \log_9 \sqrt{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

$= \log_9 \dfrac{1}{3}$

$= \dfrac{\log_3 \frac{1}{3}}{\log_3 9}$　底の変換公式

$= \underline{-\dfrac{1}{2}}$ //



S = 

(3) $y' = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$　∴ $\ell : y = \dfrac{1}{2}(x-2) + 1$　∴ $\ell : y = \dfrac{1}{2}x$

右のグラフより，$S = \dfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 - \displaystyle\int_1^2 (x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$= 1 - \left[\dfrac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2$

$= \underline{\dfrac{1}{3}}$ //

(4) $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{pmatrix}$ なので，$A^2 - 4A + 3E = O$ より $\begin{pmatrix} a^2+bc-4a+3 & b(a+d-4) \\ c(a+d-4) & d^2+bc-4d+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(i) $b = 0$ のとき，$a^2 - 4a + 3 = 0$　∴ $(a-3)(a-1) = 0$　∴ $a = 1,\ 3$　同様に $d = 1,\ 3$

(ii) $b \neq 0$ のとき　$a + d = 4$　　(i)，(ii) より，$\underline{a + d = 2,\ 4,\ 6}$ //