大阪歯科大学

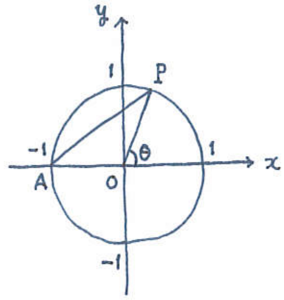
2012年 歯学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 次の問に答えよ.

(1) xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ を考える. ただし, $-\pi<\theta<\pi$ とする. 直線 AP の傾きを t としたとき, $\cos\theta$ と $\sin\theta$ を t を用いて表せ.

(2) $-\pi<\theta\leqq\pi$ とする. θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{1+\cos\theta}{3\cos\theta-2\sin\theta+5}$ の最大値と最小値, またそのときの θ の値を求めよ.



(1) 直線AP: $y=t(x+1)$

円の式に代入して. $x^2+t^2(x+1)^2-1=0$

$\therefore (t^2+1)x^2+2t^2x+t^2-1=0$

$\therefore \{(t^2+1)x+t^2-1\}(x+1)=0$

$\cos\theta\neq-1$ より. $\underline{\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{t^2+1},\ \sin\theta=\dfrac{2t}{t^2+1}}$ //

(2) (1)で求めた値を代入して, $f(\theta)$ を t で表したものを $g(t)$ とする.

$$g(t)=\frac{1+\frac{1-t^2}{t^2+1}}{3\cdot\frac{1-t^2}{t^2+1}-2\cdot\frac{2t}{t^2+1}+5}=\frac{1}{t^2-2t+4}=\frac{1}{(t-1)^2+3}$$

t はすべての実数を動くので

$g(t)$ の最大値は $g(1)=\frac{1}{3}$, 最小値は 0 ($t\to\pm\infty$ のとき)

$\therefore$ $\underline{f(\theta)\text{ の最大値は } \frac{1}{3}\ (\theta=\frac{\pi}{2}\text{ のとき}),\ \text{最小値 } 0\ (\theta=\pi\text{ のとき})}$ //