



2013年第2問

2 自然数 a_1, a_2 が,

$$a_1 \leq a_2, \quad a_1 + a_2 = a_1 a_2 \quad (1)$$

を満たすとき、 a_1, a_2 を次のように求めることができる。

解法

(1) の 2 式の両辺を $a_1 a_2$ で割ると

$$\frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1}, \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = 1$$

を得る。よって、この 2 つの式を組み合わせて

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \leq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} = \frac{2}{a_1}$$

を得る。これより $a_1 \leq 2$ である。 $a_1 = 1$ のとき、これを (1) の右の式に代入すると $1 + a_2 = a_2$ となって矛盾する。 $a_1 = 2$ のとき、これを (1) の右の式に代入すると $a_2 = 2$ となる。逆に $a_1 = a_2 = 2$ は (1) の 2 式を満たす。よって $a_1 = a_2 = 2$ となる。

必要があれば上の解法を参考にして、自然数 a_1, a_2, a_3 が

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3, \quad a_1 + a_2 + a_3 = a_1 a_2 a_3$$

を満たすとき、 a_1, a_2, a_3 を求めよ。