岡山大学

2015年 理系 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

4　座標空間内の8点

(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (0, 1, 1)

を頂点とする立方体を考える．$0<t<3$ のとき，3点 $(t,\ 0,\ 0)$, $(0,\ t,\ 0)$, $(0,\ 0,\ t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし，$f(0)=f(3)=0$ とする．関数 $f(t)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq t \leqq 3$ のとき，$f(t)$ を t の式で表せ．

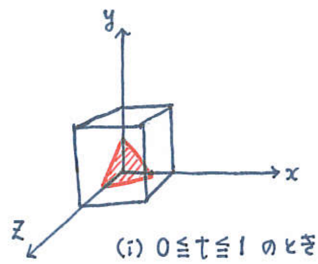
(2) 関数 $f(t)$ の $0 \leqq t \leqq 3$ における最大値を求めよ．

(3) 定積分 $\int_0^3 f(t)\,dt$ の値を求めよ．

(1) (i) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき．

切り口は，正三角形より．$f(t) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}t\cdot\sqrt{2}t\cdot\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}t^2$

1辺の長さが $\sqrt{t^2+t^2}=\sqrt{2}t$ の



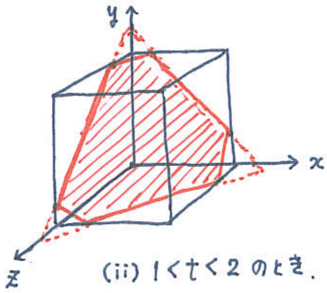
(i) $0 \leqq t \leqq 1$ のとき．

(ii) $1<t<2$ のとき．

1辺の長さが $\sqrt{2}t$ の正三角形から1辺の長さが $\sqrt{2}(t-1)$ の正三角形を3つとり除いた六角形となるから．

$$f(t) = \frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2}t)^2\sin 60^\circ - \frac{3}{2}\left\{\sqrt{2}(t-1)\right\}^2\sin 60^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}(-2t^2+6t-3)$$

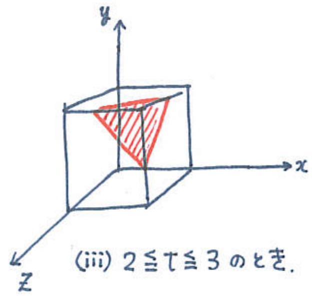


(ii) $1<t<2$ のとき．

(iii) $2 \leqq t \leqq 3$ のとき．

図形の対称性より．(i)の $f(t)$ の t に，$3-t$ を代入して．

$$f(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2$$

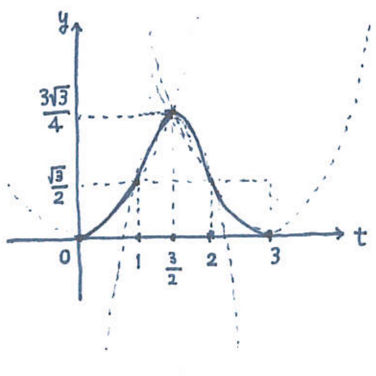


(iii) $2 \leqq t \leqq 3$ のとき．

(i)～(iii)より．
$$f(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{2}t^2 & (0 \leqq t \leqq 1 \text{ のとき}) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(-2t^2+6t-3) & (1<t<2 \text{ のとき}) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2 & (2 \leqq t \leqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}$$

(2) (1)より．$y=f(t)$ のグラフをかくと右のようになる．

$\therefore$ $f(t)$ の最大値は．$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$



0001978631208999

岡山大学

2015年 理系 第4問　2枚目／2枚

数理 石井K

4 座標空間内の8点

$(0,\ 0,\ 0),\ (1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 0),\ (0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 1),\ (1,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1)$

を頂点とする立方体を考える．$0 < t < 3$ のとき，3点 $(t,\ 0,\ 0)$, $(0,\ t,\ 0)$, $(0,\ 0,\ t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし，$f(0) = f(3) = 0$ とする．関数 $f(t)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $0 \leqq t \leqq 3$ のとき，$f(t)$ を t の式で表せ．

(2) 関数 $f(t)$ の $0 \leqq t \leqq 3$ における最大値を求めよ．

(3) 定積分 $\int_0^3 f(t)\,dt$ の値を求めよ．

(3) $\int_0^3 f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} t^2\,dt + \int_1^2 \frac{\sqrt{3}}{2}(-2t^2+6t-3)\,dt + \underline{\int_2^3 \frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2\,dt}$

$x = 3-t$ とおいて置換積分するか，図形の対称性を考えることで $\int_0^1 \frac{\sqrt{3}}{2} t^2\,dt$ と等しいことが分かる．

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 t^2\,dt + \frac{\sqrt{3}}{2} \int_1^2 -2t^2+6t-3\,dt$

$= \sqrt{3} \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \left[-\frac{2t^3}{3} + 3t^2 - 3t \right]_1^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{16}{3} + 12 - 6 + \frac{2}{3} - 3 + 3 \right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{4}{3}$

$= \underline{\sqrt{3}}$ //