上智大学

2012 年 理工学部 第 4 問

$\boxed{4}$ $\log x$ は自然対数，e は自然対数の底を表す．

(1) a，b は $e^{-1} < a < 1$，$b > 0$ を満たす実数とする．曲線 $C : y = \log x$ と直線 $\ell : y = ax + b$ とが接しているとすると，

$$b = \boxed{\text{モ}}\log a + \boxed{\text{ヤ}}$$

が成り立つ．このとき，曲線 C と 3 つの直線 ℓ，$x = 1$，$x = e$ とで囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする．a が $e^{-1} < a < 1$ の範囲を動くときの $S(a)$ の最小値は

$$\left(\boxed{\text{ユ}}\,e + \boxed{\text{ヨ}}\right)\log\left(\frac{e + \boxed{\text{ラ}}}{\boxed{\text{リ}}}\right) + \boxed{\text{ル}}$$

で与えられる．

(2) k を正の定数とし，$e^{-k} < t < 1$ である t に対して，

$$f(t) = \int_0^k \left|e^{-x} - t\right| dx$$

とおく．t が $e^{-k} < t < 1$ の範囲を動くときの関数 $f(t)$ の最小値を $M(k)$ とおくと，

$$M(k) = \left(\boxed{\text{レ}} + e^P\right)^2,\quad \text{ただし } P = \frac{\boxed{\text{ロ}}}{\boxed{\text{ワ}}}k$$

となる．このとき

$$\lim_{k \to +0} \frac{M(k)}{k^2} = \frac{\boxed{\text{ヲ}}}{\boxed{\text{ン}}}$$

である．