上智大学

2011年 第2問

$\boxed{2}$ a を実数とし，2つの放物線

$$C : y = -x^2 + 4, \quad C_a : y = (x-a)^2 + a$$

を考える．

(1) C と C_a が異なる2点で交わるための条件は，

$$-a^2 + \boxed{\text{サ}}\,a + \boxed{\text{シ}} > 0$$

であり，したがって

$$\boxed{\text{ス}} < a < \boxed{\text{セ}}$$

である．このとき

$$b = \sqrt{-a^2 + \boxed{\text{サ}}\,a + \boxed{\text{シ}}}$$

とおくと，$(a,\ b)$ は中心が $\left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}}\right)$ で，半径が $\boxed{\text{チ}}$ の円周上にある．

(2) $\boxed{\text{ス}} < a < \boxed{\text{セ}}$ のとき，C と C_a との交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とすると，

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \boxed{\text{ツ}}\,a + \boxed{\text{テ}} \\ 2\alpha\beta &= \boxed{\text{ト}}\,a^2 + \boxed{\text{ナ}}\,a + \boxed{\text{ニ}} \\ \beta - \alpha &= \boxed{\text{ヌ}}\,b + \boxed{\text{ネ}} \end{aligned}$$

である．

(3) C と C_a により囲まれた図形の面積は，$a = \boxed{\text{ノ}}$ のときに最大値 $\boxed{\text{ハ}}$ をとる．