



2017年 教育学部 第3問

3 関数 $y = 3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta + 6\sin \theta + 12\cos \theta$ について、次の各問に答えよ。ただし、 $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

(1) $x = \sin \theta + 2\cos \theta$ として、 y を x の関数で表せ。

(2) y の最大値と最小値を求めよ。

$$\begin{aligned} (1) \quad x^2 &= \sin^2 \theta + 4\sin \theta \cos \theta + 4\cos^2 \theta \\ &= \frac{1 - \cos 2\theta}{2} + 2\sin 2\theta + 4 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \\ &= \frac{3}{2} \cos 2\theta + 2\sin 2\theta + \frac{5}{2} \end{aligned}$$

$$\therefore 2x^2 - 5 = 3\cos 2\theta + 4\sin 2\theta$$

$$\therefore y = 2x^2 - 5 + 6x$$

$$\therefore \underline{y = 2x^2 + 6x - 5}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad x &= \sin \theta + 2\cos \theta \\ &= \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) \quad \left(\begin{array}{l} \text{ここで、}\alpha \text{は} \\ \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array} \right) \end{aligned}$$

右図より

$$\sqrt{5} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \leq x \leq \sqrt{5} \quad \therefore -2 \leq x \leq \sqrt{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} (1) \text{より、} \quad y &= 2(x^2 + 3x) - 5 \\ &= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{19}{2} \end{aligned}$$

$x = -\frac{3}{2}$ は $\textcircled{1}$ の範囲にありグラフは右のようになる。

$$\therefore \underline{\text{最大値 } 5 + 6\sqrt{5}, \text{ 最小値 } -\frac{19}{2}}$$

↑
 $x = \sqrt{5}$ のとき

↑
 $x = -\frac{3}{2}$ のとき

