

2011年工学部第2問

数理
石井

2 曲線 $y = ax^3$ と曲線 $y = 5 \log x$ が接しているとする。ただし、 a は正の定数で、対数は自然対数である。

- (1) a の値を求めよ。
 (2) 2つの曲線および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1) $f(x) = ax^3$, $g(x) = 5 \log x$ とおき、接点の x 座標を α とする。 ($\alpha > 0$)

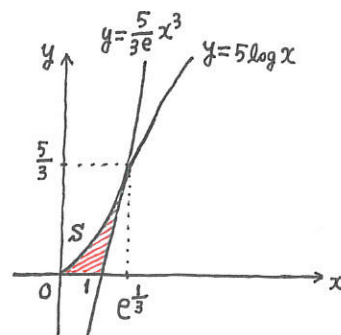
2つの曲線が接することから、

$$f(\alpha) = g(\alpha) \quad \text{かつ} \quad f'(\alpha) = g'(\alpha) \iff a\alpha^3 = 5 \log \alpha \cdots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad 3a\alpha^2 = \frac{5}{\alpha} \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{ の両辺に } \frac{\alpha}{3} \text{ をかけて、} \quad a\alpha^3 = \frac{5}{3} \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{3} \text{ より、} \quad 5 \log \alpha = \frac{5}{3} \quad \therefore \alpha = e^{\frac{1}{3}}$$

$$\textcircled{3} \text{ にこれを代入して、} \quad a = \frac{5}{3e} \quad \text{これは } \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ をみたす。}$$



(2) 右図より、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{e^{\frac{1}{3}}} \frac{5}{3e} x^3 dx - \int_1^{e^{\frac{1}{3}}} 5 \log x dx \\ &= \frac{5}{3e} \int_0^{e^{\frac{1}{3}}} x^3 dx - 5 \int_1^{e^{\frac{1}{3}}} (x)' \log x dx \\ &= \frac{5}{3e} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^{e^{\frac{1}{3}}} - 5 \left[x \log x \right]_1^{e^{\frac{1}{3}}} + 5 \int_1^{e^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= \frac{5}{3e} \cdot \frac{e^{\frac{4}{3}}}{4} - 5 \cdot e^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{3} + 5(e^{\frac{1}{3}} - 1) \\ &= \frac{5}{12} e^{\frac{1}{3}} - \frac{5}{3} e^{\frac{1}{3}} + 5e^{\frac{1}{3}} - 5 \\ &= \frac{15}{4} e^{\frac{1}{3}} - 5 \end{aligned}$$

