横浜市立大学

2014年 医学部 第4問

$\boxed{4}$ nを4以上の整数とする．1番からn番までの番号がふられたボールが1つずつある．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 以下のような操作でボールを1列に並べる：

(i) 1番のボールを適当な位置におく．

(ii) 2番のボールを1番のボールの左または右に同じ確率でおく．

(iii) 3番のボールをすでに並んでいる2つのボールの左または間または右に同じ確率でおく．

(iv) 以下n番まで番号順に，k番のボールを，すでに並んでいるボールの一番左または間または一番右に同じ確率でおく，ことを繰り返す．

例えば，左から2番，1番，3番のボールが並んでいるとき，4番のボールが2番と1番の間におかれる確率は$\dfrac{1}{4}$である．

n番のボールをおき終えたとき，i番のボールが左からj番目に並ぶ確率は$\dfrac{1}{n}$であることを証明せよ．ただし，iとjは1以上，n以下の整数とする．

(2) (1)のボールの列を,（左から）番号順に並び替えるため，以下の操作を考える：

隣り合った2つのボールの組で，左のボールの番号が右のそれより大きなもの（入れ替え可能な組と呼ぶ）が存在するとき，そのようなボールの組を1つ選び，入れ替える．

入れ替え可能な組が複数あった場合に，入れ替える組をどのように選んだとしても，この操作を繰り返すことにより，すべてのボールの列は，必ず番号順の列になることを証明せよ．

(3) (2)の操作の回数は，入れ替える組の選び方とは無関係であることを証明せよ．

(4) (2)においてボールの列を番号順に並べ替えるとき，i番のボールを，より番号の小さいボールと入れ替える回数の期待値をE_iとする．このとき，

$$\sum_{i=1}^{n} E_i$$

を求めよ．