0001330729668999

香川大学

2013年 教育学部・農学部 第5問

数理 石井K

$\boxed{5}$ 次の問に答えよ．

(1) 曲線 $C : y = x^3e^{-x}$ の概形をかけ．

(2) 原点を通り傾きが正の直線 ℓ は，曲線 C に点Pで接している．このとき，ℓ の方程式およびPの座標を求めよ．

※ y' だけでも正解となるであろう

(1) $y' = 3x^2 \cdot e^{-x} + x^3 \cdot (-e^{-x})$

$= -x^2(x-3)e^{-x}$

$y'' = (-3x^2+6x)e^{-x} - x^2(x-3)\cdot(-e^{-x})$

$= x(x^2-6x+6)e^{-x}$

$\therefore$ $y'=0$ となるのは．$x=0,\ 3$ のとき

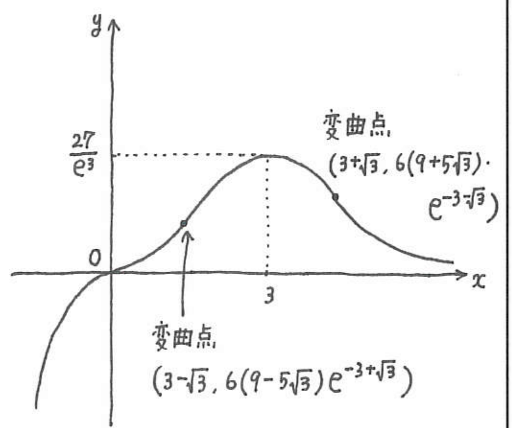
$y''=0$ となるのは．$x=0,\ 3\pm\sqrt{3}$ のとき

また，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} y = -\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} y = 0$ と

右の増減表より，グラフは右下のようになる．

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$	$3+\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
y	↗	0	↗		↗	$\frac{27}{e^3}$	↘		↘

$6(9-5\sqrt{3})e^{-3+\sqrt{3}}$　　$6(9+5\sqrt{3})e^{-3-\sqrt{3}}$



(2) 傾きが正より，$y'>0$

よって，Pの x 座標は．$x<0$ または $0<x<3$ …①

①をみたす x を t として，$P(t,\ t^3e^{-t})$ とすると．

$\ell : y = -t^2(t-3)e^{-t}\cdot(x-t) + t^3e^{-t}$ …②

これが原点を通るので

$0 = t^3(t-3)e^{-t} + t^3e^{-t}$

$\therefore t^3(t-2)e^{-t} = 0$

①より，$t=2$

②に代入して，$\underline{\ell : y = \frac{4}{e^2}x}$ //

$\underline{P\left(2,\ \frac{8}{e^2}\right)}$ //