香川大学

2015年 工学部 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ （新課程履修者）複素数平面上に原点 O(0) と点 A$(1+\sqrt{3}i)$ がある．ただし，i を虚数単位とする．このとき，次の問に答えよ．

(1) 複素数 $1+\sqrt{3}i$ を極形式で表せ．ただし，偏角 θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．

(2) 点 A を原点のまわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を求めよ．

(3) 虚軸上の点 B(z) が OB ＝ AB を満たすとき，複素数 z を求めよ．

(4) (3) で求めた B(z) に対して，3 点 O，A，B を通る円の中心を表す複素数を求めよ．

(1) $1+\sqrt{3}i = 2\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right) = \underline{2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)}$ //

(2) 求める複素数を α とおくと，

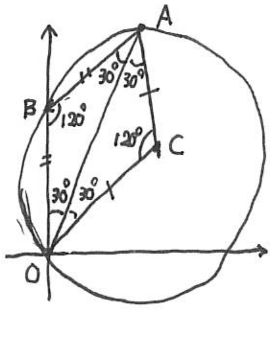
$$\alpha = (1+\sqrt{3}i)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= 2(\cos 0 + i\sin 0)$$
$$= \underline{2}$$ //

(3) $z = ai$ (a：実数) とおくと，OB $= a$，

AB $= \sqrt{1^2+(\sqrt{3}-a)^2}$　∴ OB＝AB より　$a = \sqrt{4-2\sqrt{3}a+a^2}$

(右辺) は正より，$a>0$ …①　両辺を2乗して，$a^2 = a^2-2\sqrt{3}a+4$

∴ $a = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$　これは①をみたす　∴ $\underline{z = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}i}$ //



(4) 円の中心を C とおくと，$\triangle$OAB $\equiv$ $\triangle$OAC となるので

$\angle$BOC $= \dfrac{\pi}{3}$，OB＝OC

∴ 円の中心 C は B を原点 O のまわりに $-\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点となる。ここで点 C を表す複素数を γ とおくと，

$$\therefore\ \gamma = \frac{2\sqrt{3}}{3}i\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}i\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$　∴ $\underline{\gamma = 1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i}$ //